第 1 章　绪论

1.1 电磁场问题及求解方法

自 1864 年 Maxwell 以统一的数学模型总结了物理学的基本电磁定律, 电磁场理论作为物理学的一个活跃分支, 获得了长足的发展, 经历了经典电动力学 ⟶ 相对论电动力学、量子电动力学的飞跃, 而且作为无线电工程的理论基础, 在各类边值问题的稳态解、瞬态解、边值问题的反演理论等方面进行了广泛而深入的研究. 但是在电磁场工程应用中面临的基本问题仍然是求解各种复杂形状和媒质的边值问题. 这也是本课程的主要任务.

电磁现象是自然界最基本的现象之一. 本课程是一门非常基础性的课程, 在现代无线通信、光通信、微电子学、生命科学、生物医学工程、电力电机、微纳米科学等俱多领域都有重要应用.

电磁场边值问题三要素　包含电磁源分布、媒质及边界条件、电磁场分布.

三类任务

本征值问题: 媒质和边界条件 ⟶ 求可能存在的场分布模式 (如距形波导管中的本征模式) ;

场分析: 媒质、边条以及源分布 ⟶ 实际场分布 (如室内场分布) ;

逆散射: 媒质和边条及实际场分布 ⟶ 求源分布 (雷达) .

1.1.1 电磁场边值问题的三类求解方法

解析法: 所有这些问题仅在某些极少数的情况 (简单媒质和边条) 下才有解析形式的严格解.

近似法: 微扰法、变分法、几何光学、物理光学、几何绕射理论等

数值法: 算子方程的离散化、计算方法、计算机技术. 在大多数的实际问题中必须用数值解法, 如矩量法 (MoM) 、有限元法 (FEM) 、边界元法 (BEM) 、有限差分法 (FDM) 、直线法 (LM) 、小波法 (wavelet) 、传输线矩阵法 (TLM) 等.

1.1.2 解析法

严格建立和求解偏微分方程或积分方程

- \+ 可将解表示为已知函数的显式, 从而可以得到精确的数字答案;
- \+ 可以作为近似解和数值解的检验标准;
- \+ 结果与物理参数的内在关系明确, 有利于设计. 大多数情况下物理意义明确.
- – 只有少数情况可以用解析法求解

分离变量法　求解偏微分方程的经典方法, 是将偏微分方程化解为几个常微分方程, 然后求常微分方程, 解为本征函数或其组合.

– 要求所选用的坐标系变量可分离. 常用的十三中坐标系中只有十一种适用. 要求边界与坐标系共面;
– 要求偏微分方程是齐次的. 对于非齐次偏微分方程, 只有自由项和系数满足级数展开和积分变换的条件, 才能应用.

格林函数法 先求单位源产生的场分布 — Green 函数, 然后在乘以源分布在源所在区域积分得到总场.

+ 可以利用 δ 函数的性质, 为 Green 函数的求解带来便利;
+ 只要已知一定条件下的 Green 函数, 不论源分布如何变化, 都可以直接应用.
– 对于许多问题, Green 函数的求解相当困难;
– Sommerfeld 类积分十分困难.

1.1.3 近似法

本质上是一种近似的解析法, 即在某些假设条件下对问题简化. 可以解决一类解析法无法解决的问题. 也可以将解析法可以解决的问题用一种更简便的方式表达.

– 随着所期望的求解精度的提高, 计算量增大, 而减少计算量的直接后果的是解的精度不满足要求.
– 假设条件限制了适用范围. 使用时特别要注意前提条件是什么.

常用的有: 逐步逼近法、微扰法、变分法、迭代变分法、几何光学法、物理光学法、几何绕射理论和物理绕射理论等.

微扰法 在同一区域、同样边界条件下, 考虑两个方程: 一个有已知严格解和另一个待求. 要求两者相似而且接近. 前者的解作为零阶近似, 加入微扰后逐步逼近待求方程的解.

如已知方程

$$L(\varphi) + \lambda\varphi = 0 \tag{1.1}$$

其中 L 为微分算子, φ 和 λ 分别为本征函数和本征值.

待求方程

$$L(\varphi) + (\lambda' - \varepsilon u)\varphi = 0 \tag{1.2}$$

φ, λ' 分别为本征函数和本征值, u 为所考虑区域的连续函数. ε 为微扰参数, $-\varepsilon u\varphi$ 就是微扰项. 将 φ, λ' 关于 ε 展开:

$$\begin{cases} \varphi = \varphi + \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i \varepsilon^i \\ \lambda' = \lambda + \sum\limits_{i=1}^{\infty} B_i \varepsilon^i \end{cases} \tag{1.3}$$

将式 (1.3) 代入式 (1.2), 求解得到 A_i、B_i 即可. 其缺点是要求微扰量很小.

变分法 首先将偏微分方程化为相应的变分形式, 即找到一个包含待求函数的泛函, 而且要求该泛函有极值存在. 假设一个试探函数, 他与待求函数满足同样的边界条件和初始条件, 同时包括几个待定参数 —变分参数. 由泛函对每一个变分参数的变分等于零得到变分参数 — 得到由试探函数和变分参数表示的解. 试探函数中的变分参数越多, 解越精确, 但工作量也越大. 也可以用迭代方式求解 —逐步逼近法.

几何绕射理论 (GTD) 高频近似的经典方法为几何光学和物理光学法, 但其前提条件是频率趋向于无穷大 (波长趋向于零), 因而所讨论的物体 (散射体) 的尺寸必须远大于波长时才能应用, 而且对于散射体的边缘、拐角、尖端或阴影区都不能应用. GTD 近似条件类似但适当放宽以解决这些问题 (散射体的边缘、拐角、尖端或阴影区等).

GTD 的基础是: 广义费马原理 ⟶ 绕射定律 ⟶ 绕射线传播路径; 绕射场沿该路径传播;

局部性原理: 绕射场取决于绕射点邻域内散射体的物理特性和几何特性;

离开绕射点后绕射场仍然遵守几何光学定律, 即眼直线传播而且在绕射线管内能量守恒, 绕射场相位延迟等于媒质的传播常数与传播距离的乘积.

基本思路: 典型问题的严格解 ⟶ 由局部性原理得到一般问题的局部解 ⟶ 所有绕射场迭加得到总的绕射场.

- 典型问题的解的数量有限. 限制应用范围;
- 复杂问题绕射点的确定比较困难, 实际上其本身就已经是一个极值问题;
- GTD 在散焦区失效 —已经被 UTD、等效边缘流等方法克服.

1.2 电磁场的数值分析方法简介

+ 使得复杂问题的求解成为可能
+ 为理论分析、工程设计带来了变革 ⟶ 新的方法、设计思想不断涌现
+ 从数学理论上, 各种方法之间由一定的内在联系, 但工程应用中各有优缺点、互为补充 ⟶ **没有最好的, 只有对某一个问题最合适的**;

- 也是一种近似方法, 它的正确与否必须用实验或其他可靠结果验证;
- 不是万能的, 单纯的数值方法往往计算量十分惊人, 受计算机的承受能力、工作量、计算成本等方面的制约. 即任何数值方法是否有效必须考虑计算量、设计成本、误差能否接受、结果是否稳定等;
- 物理意义不明. 由分析结果进行设计时问题转化为一个计算量庞大的优化问题.

有限差分法 (FDM: Finite Difference Method)

• 最早出现在 50 年代中期: 力学

- 利用差分原理将电磁场连续场域问题变换为离散系统问题求解, 也就是用离散网格上的值逼近连续场分布
- 关键是场域和边界上偏微分方程的差分格式

+ 直观、简单. 对边值问题、初值问题中各类偏、常微分方程, 椭圆、双曲、抛物型二阶线性方程以至高阶方程均可适用.

– 复杂边界形状处理困难, 三维问题处理复杂、计算量大, 开放区域吸收边界条件

有限元法 (FEM: Finite Element Method)

- 最早出现在 1960 年, R.W.Clough: 力学
- 变分原理和剖分插值为基础, 可以认为是有限差分法与变分法中 Ritz 法的结合. 将场域划分为许多小区域, 在每一个小区域上建立场元方程并用变分求泛函极值的方式建立网格上场元之间的关系, 最后再联立成整个场域的线性代数方程.

+ 适用于处理复杂边界、复杂媒质的情况
+ 易于标准化处理, 已有通用程序、软件
+ 计算精度高

– 分割的单元数和节点数较多, 导致问题的初始化复杂
– 代数方程阶数高, 计算量大, 计算成本高, 尤其对三维问题
– 无限区域的处理比较困难, 而且误差大.

边界元法 (BEM: Boundary Element Method)

- 70 年代中期: 力学, 80 年代移植到电磁场领域
- 是边界积分法和有限元法的结合
- 将内域场用边界积分表示为边界上的场, 再在边界上离散化处理.

+ 降维 $\longrightarrow$ 三维问题的边界是两维, 成为两维问题, 计算量大大减少

– 在场域中利用格林函数, 因而不适用含有非均匀媒质的情况
– 对多种媒质的问题必须处理各媒质区域的边界, 然后构成联立方程, 比较复杂
– 所得代数方程的系数距阵不是稀疏距阵, 因而所有元素都要用数值方式计算, 增加了计算量

矩量法 (MoM: Moment of Method)

- 1968 年 R.F.Harrington 提出. 直接出现在电磁场领域
- 适用于各种类型的线性算子方程, 算子可以是微分、积分、距阵以及他们的组合
- 将待求函数用一组基函数展开, 再选择一组权函数对其进行加权内积, 将算子方程化为代数方程求解
- 也是一种内域法 (与 FEM 一样) , 因而计算量大
- 目前已经成为电磁场数值计算中使用最多、应用最广泛的一种方法

谱域法 (SDM: Spectral Domain Method)

- 1971 年 R.Mittra 等提出, T.Itoh 对此作了较大的贡献
- SDM 本质上是一种积分变换方法
- 时域信号 — (傅立叶变换)—频域信号
- 空域电磁波 — (傅立叶变换)—谱域电磁波 (直角坐标的变换是平面波的迭加, 圆柱坐标内的变换是柱面波的迭加)

+ 降维, 简化问题, 尤其适合于处理多层媒质问题
– 谱域格林函数的求解
– 傅立叶反变换, 即谱域积分, 收敛慢.

奇异点展开法 (SEM: Singularity Extended Method)

主要是描述天线及散射体的暂态特性, 最早由 Prony 在 1975 年提出了奇点直接提取方法. 其基本概念是将电磁场响应用复频率平面内的奇点来描述. 如果用给定的瞬态波投射到目标上, 则从目标上散射回来的瞬态波与原来的波形不同, 称为响应波. 他们之间存在转换函数关系, 这个关系就表征了目标的固有特征. 因此响应波可以用目标转换函数的极点位置和留数来描述 $\longrightarrow$ 目标不同, 响应波不同, 极点位置和留数也不同 $\longrightarrow$ 确定目标形状和性质 $\longrightarrow$ 用于目标识别.

关键是极点提取, 有 Prony 法、POF (Pencil of Function) 法、Modified FFT 法、相关矩阵等.

以上介绍了几种数值方法, 还有一大类或者趋势是组合方法, 如: MM-GTD, BEM-FEM, MoM 与格林函数的结合等.