第 2 章　矢量及并矢分析

2.1 广义正交曲线坐标系

2.1.1 单位矢量与度量因子

设正交曲线坐标为 $p(u_1, u_2, u_3)$, 直角坐标: $p(x, y, z)$, 则有

$$
\left.\begin{aligned}
u_1 &= g_1(x,y,z)\\
u_2 &= g_2(x,y,z)\\
u_3 &= g_3(x,y,z)
\end{aligned}\right\}
\qquad
\begin{aligned}
x &= G_1(u_1,u_2,u_3)\\
y &= G_2(u_1,u_2,u_3)\\
z &= G_3(u_1,u_2,u_3)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

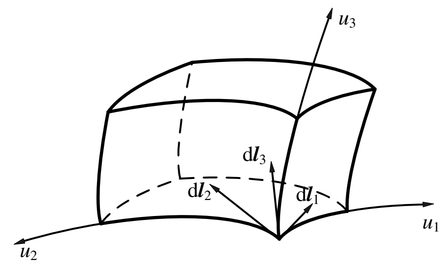

图 2.1　体积元

一般来说, 微分 $\mathrm{d}u_i$ 并不一定具有长度量纲, 并沿着坐标曲线的弧长微元矢量 $\mathrm{d}l_i$ 的, 只有用适当的系数 h_i 乘 $\mathrm{d}u_i$ 才得到弧长, 即

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \hat{\boldsymbol{u}}_1\,\mathrm{d}l_1 + \hat{\boldsymbol{u}}_2\,\mathrm{d}l_2 + \hat{\boldsymbol{u}}_3\,\mathrm{d}l_3 = \hat{\boldsymbol{u}}_1 h_1\,\mathrm{d}u_1 + \hat{\boldsymbol{u}}_2 h_2\,\mathrm{d}u_2 + \hat{\boldsymbol{u}}_3\,\mathrm{d}u_3 \tag{2.2}
$$

h_i 称为度量因子 (Lamé 系数), 其中 $\hat{\boldsymbol{u}}_1, \hat{\boldsymbol{u}}_2, \hat{\boldsymbol{u}}_3$ 一般不是常矢量. 因为在直角坐标系下 $\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \hat{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}x + \hat{\boldsymbol{y}}\,\mathrm{d}y + \hat{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}z$, 设 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 只沿 u_1 线方向, u_2, u_3 为常数, 则

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{h_1\,\mathrm{d}u_1} &= \frac{\hat{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}x + \hat{\boldsymbol{y}}\,\mathrm{d}y + \hat{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}z}{h_1\,\mathrm{d}u_1}\\
&= \hat{\boldsymbol{x}}\frac{1}{h_1}\frac{\partial x}{\partial u_1} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{1}{h_1}\frac{\partial y}{\partial u_1} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{1}{h_1}\frac{\partial y}{\partial u_1}\\
&= \hat{\boldsymbol{x}}\frac{1}{h_1}\frac{\partial G_1}{\partial u_1} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{1}{h_1}\frac{\partial G_2}{\partial u_1} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{1}{h_1}\frac{\partial G_3}{\partial u_1}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

其中

$$
\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial x}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3
$$

同理

$$
\hat{\boldsymbol{u}}_2 = \hat{\boldsymbol{x}}\frac{1}{h_2}\frac{\partial G_1}{\partial u_2} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{1}{h_2}\frac{\partial G_2}{\partial u_2} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{1}{h_2}\frac{\partial G_3}{\partial u_2}. \tag{2.4}
$$

$$
\hat{\boldsymbol{u}}_3 = \hat{\boldsymbol{x}}\frac{1}{h_3}\frac{\partial G_1}{\partial u_3} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{1}{h_3}\frac{\partial G_2}{\partial u_3} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{1}{h_3}\frac{\partial G_3}{\partial u_3}. \tag{2.5}
$$

其中 $h_i,\quad i=1,2,3$ 为度量因子, 以及已知 G_1,G_2,G_3, 则 $\hat{\boldsymbol{u}}_i,\quad i=1,2,3$ 可确定. 由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\hat{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}x+\hat{\boldsymbol{y}}\,\mathrm{d}y+\hat{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}z$, 若只沿 u_1 方向, 则 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1=\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial x}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial y}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial z}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1$, 所以

$$\mathrm{d}l_1=h_1\,\mathrm{d}u_1=\left[\left(\frac{\partial G_1}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial G_2}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial G_3}{\partial u_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u_1$$

即

$$h_i=\sqrt{\left[\sum_{n=1}^{3}\left(\frac{\partial G_n}{\partial u_i}\right)^2\right]},\quad i=1,2,3$$

体积元为

$$\mathrm{d}V=h_1h_2h_3\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3=\frac{\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3}{|\nabla\,\mathrm{d}u_1||\nabla\,\mathrm{d}u_2||\nabla\,\mathrm{d}u_3|}\tag{2.6}$$

2.1.2 坐标变换下单位矢量间的关系

设

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{l}&=h_1\,\mathrm{d}u_1\hat{\boldsymbol{u}}_1+h_2\,\mathrm{d}u_2\hat{\boldsymbol{u}}_2+h_3\,\mathrm{d}u_3\hat{\boldsymbol{u}}_3\quad\text{（变前的坐标系）}\\ \mathrm{d}\boldsymbol{l}&=h_1'\,\mathrm{d}u_1'\hat{\boldsymbol{u}}_1'+h_2'\,\mathrm{d}u_2'\hat{\boldsymbol{u}}_2'+h_3'\,\mathrm{d}u_3'\hat{\boldsymbol{u}}_3'\quad\text{（变后的坐标系）}\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{u}}_1'=\dfrac{\partial\boldsymbol{l}}{h_1'\partial u_1'}=\hat{\boldsymbol{u}}_1\dfrac{h_1}{h_1'}\dfrac{\partial u_1}{\partial u_1'}+\hat{\boldsymbol{u}}_2\dfrac{h_2}{h_1'}\dfrac{\partial u_2}{\partial u_1'}+\hat{\boldsymbol{u}}_3\dfrac{h_3}{h_1'}\dfrac{\partial u_3}{\partial u_1'}\\ \hat{\boldsymbol{u}}_2'=\hat{\boldsymbol{u}}_1\dfrac{h_1}{h_2'}\dfrac{\partial u_1}{\partial u_2'}+\hat{\boldsymbol{u}}_2\dfrac{h_2}{h_2'}\dfrac{\partial u_2}{\partial u_2'}+\hat{\boldsymbol{u}}_3\dfrac{h_3}{h_2'}\dfrac{\partial u_3}{\partial u_2'}\\ \hat{\boldsymbol{u}}_3'=\hat{\boldsymbol{u}}_1\dfrac{h_1}{h_3'}\dfrac{\partial u_1}{\partial u_3'}+\hat{\boldsymbol{u}}_2\dfrac{h_2}{h_3'}\dfrac{\partial u_2}{\partial u_3'}+\hat{\boldsymbol{u}}_3\dfrac{h_3}{h_3'}\dfrac{\partial u_3}{\partial u_3'}\end{cases}\tag{2.7}$$

特别地, 对和直角坐标之间的变换, 用矩阵表示, 有

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}u_1\\ \mathrm{d}u_2\\ \mathrm{d}u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}&\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}&\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}&\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}&\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}&\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}&\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \mathrm{d}x_2\\ \mathrm{d}x_3\end{bmatrix}=[T]\begin{bmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \mathrm{d}x_2\\ \mathrm{d}x_3\end{bmatrix}\tag{2.8}$$

其中 $[T]$ 为变换矩阵, 矩阵 $[T]$ 的行列式称为 Jacobi 式, 记为

$$J=|T|=\frac{\partial(u_1,u_2,u_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}=(\nabla u_1,\nabla u_2,\nabla u_3)\tag{2.9}$$

在 $J \neq 0$ 时, 有

$$[T][\mathrm{d}x_i] = [\mathrm{d}u_i] = [T][T]^{-1}[\mathrm{d}u_i]$$

例 椭圆柱坐标系,

$$\left.\begin{aligned} x &= G_1 = p\cosh\xi\cos\eta \\ y &= G_2 = p\sinh\xi\sin\eta \\ z &= G_3 = z \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} h_1 &= h_\xi = h_2 = h_\eta = p\sqrt{\cosh^2\xi - \cos^2\eta} \\ h_3 &= h_z = 1 \end{aligned} \tag{2.10}$$

证明

$$\begin{aligned} h_1 = h_\xi &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[(p\sinh\xi\cos\eta)^2 + (-p\cosh\xi\sin\eta)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= p\left[(\cos^2\xi - 1)\cos^2\eta + \cosh^2\xi(1-\cos^2\eta)\right]^{\frac{1}{2}} = p\sqrt{\cosh^2\xi - \cos^2\eta} \end{aligned}$$

2.1.3 变量分离的充要条件

这里讨论的变量分离限于标量 Helmholtz 方程[59]

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \tag{2.11}$$

由后述式 (2.45), 在正交曲线坐标系下展开为

$$\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{h_1h_2h_3}\cdot\frac{\partial}{\partial u_n}\left|\frac{h_1h_2h_3}{h_n^2}\frac{\partial\psi}{\partial u_n}\right| + k^2\psi = 0 \tag{2.12}$$

设有 3×3 行列式如下

$$S = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix} \tag{2.13}$$

则按第一列各元素的代数余子式展开, 有

$$\sum_{n=1}^{3} M_n\varphi_{n1} = S, \qquad \sum_{n=1}^{3} M_n\varphi_{nm} = 0, m \neq 1 \tag{2.14}$$

其中

$$M_1 = \frac{\partial S}{\partial \varphi_{11}} = \begin{vmatrix} \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix}, \quad M_2 = -\begin{vmatrix} \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{22} & \varphi_{23} \end{vmatrix}$$

若方程 (2.12) 可以展开为分离变量

$$\psi(u_1,u_2,u_3)=U_1(u_1)U_2(u_2)U_3(u_3) \tag{2.15}$$

且分别满足方程

$$\frac{1}{f_n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u_n}\left[f_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u_n}U_n(u_n)\right]+\left[k_1^2\varphi_{n1}+k_2^2\varphi_{n2}+k_3^2\varphi_{n3}\right]U_n(u_n)=0 \tag{2.16}$$

式中 $n=1,2,3,k_1=k$, 而 k_2、k_3 为新的分离常数. 若将上式乘以 $\dfrac{M_n}{S}U_lU_m$, 其中 $n,l,m=1,2,3,\ n\neq l\neq m$, 再对 n 求和, 考虑到 (2.14) 的关系, 可得

$$\sum_{n=1}^{3}\frac{M_n}{Sf_n}\frac{\partial}{\partial u_n}\left[f_n\frac{\partial\psi}{\partial u_n}\right]+k^2\psi=0 \tag{2.17}$$

则此式与 (2.12) 形式相同. 由此可知, 若 (2.12) 式可分离为如式 (2.16) 的三个独立常微分方程, 须满足下列条件:

1. f_1,f_2,f_3 应该分别仅为 u_1,u_2,u_3 的函数, 即 $f_n=f_n(u_n)$;
2. 行列式 S 的每一行中各元素 φ_{nm} 应当仅为 u_n 的函数. 具有这种特性的行列式称为 Stäckel 行列式. 显然, 第一列各元素的余子式 M_n 应当与 u_n 无关.
3. 比较式 (2.12) 和式 (2.17) 可知, 因子 $\dfrac{h_1h_2h_3}{h_n^2}$ 应为 $f_n(u_n)$ 与另一函数 $g_n(u_l,u_m)$ 的乘积, g_n 与 u_n 无关. 即

$$\frac{h_1h_2h_3}{h_n^2}=f_n(u_n)g_n(u_l,u_m),\quad ,n,l,m=1,2,3,\ n\neq l\neq m \tag{2.18}$$

将式 (2.18) 代入式 (2.12), 可知

$$h_n^2=\frac{S}{M_n} \tag{2.19}$$

于是

$$\frac{h_1h_2h_3}{S}=\frac{f_1(u_1)g_1(u_2,u_3)}{M_1(u_2,u_3)}=\frac{f_2(u_2)g_2(u_3,u_1)}{M_2(u_3,u_1)}=\frac{f_3(u_3)g_3(u_1,u_2)}{M_3(u_1,u_2)} \tag{2.20}$$

由此求得

$$\frac{h_1h_2h_3}{S}=f_1(u_1)f_2(u_2)f_3(u_3) \tag{2.21}$$

这样, 若在给定坐标系中, Stäckel 行列式存在, 且式 (2.21) 成立, 那么 Helmholtz 方程在相应的坐标系中即可分离变量.

例 直角坐标系中, $h_1 = h_2 = h_3 = 1$, 由式 (2.18) 有

$$\begin{aligned} 1 &= f_1(x)g_1(y,z) \\ 1 &= f_2(y)g_2(z,x) \\ 1 &= f_3(z)g_3(x,y) \end{aligned}$$

可见 $f_1 = f_2 = f_3 = 1$, $S = 1$, $M_1 = M_2 = M_3 = 1$, 经过试探以后可以建立 Stäckel 行列式为

$$S = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

因此, Helmholtz 方程在直角坐标系中是可以分离变量的.

又如在圆柱坐标系中, $h_1 = h_3 = 1$, $h_2 = \rho$, 于是有

$$\begin{aligned} \rho &= f_1(\rho)g_1(\varphi,z) \\ \frac{1}{\rho} &= f_2(\varphi)g_2(z,\rho) \\ \rho &= f_2(z)g_2(\rho,\varphi) \end{aligned}$$

由此可知 $f_1 = \rho$, $f_2 = f_3 = 1$, $S = 1$, $M_1 = M_2 = M_3 = 1$, 则有

$$S = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\rho^2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

球坐标下, $f_1 = r^2$, $f_2 = \sin\theta$, $f_3 = 1$, $M_1 = 1$, $M_2 = \dfrac{1}{r^2}$, $M_3 = \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}$, Stäckel 行列式为

$$S = \begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{\sin^2\theta} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2.2 电磁理论中的符号矢量方法

矢量场论是电磁理论中最基本的数学工具. 但是, 传统的 ∇ 算子及其与其它算子的组合表达的运算法, 却难以找到系统的阐述和严格的论证. 戴振铎教授对矢量场论作了全面的历史回顾, 指出了至今仍存在于矢量分析中的混淆和错误, 找到了产生错误的根源, 并通过 “符号矢量” 方法, 系统地建立了一套完善的矢量场符号运算理论, 澄清了矢量分析学科中长期存在的问题.[57]

2.2.1 传统算子理论中的问题

众所周知, 在笛卡尔坐标系下, ∇ 算子的定义为

$$\nabla = \hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.22}$$

其中, $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$ 分别代表三个正交坐标轴方向上的单位矢量, 若用 x_1, x_2, x_3 分别代替 x, y, z, 则上式可表示为

$$\nabla = \sum_{i=1}^{3} \hat{\boldsymbol{x}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.23}$$

在目前通用的矢量分析中, 都是利用上述 ∇ 算子表述矢量场的散度和旋度的, 表达形式如下:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{3} \hat{\boldsymbol{x}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_i} \tag{2.24}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{3} \hat{\boldsymbol{x}}_i \times \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_i} \tag{2.25}$$

在笛卡尔坐标系下, 表面上看这个结果没有问题, 但实际上, 这个结果仅仅是一个形式上凑出来的结果而不是推算出来的. 例如, 认为 $\partial/\partial x_i$ 是标量算子, 因而可以越过点乘和叉乘符号, 直接作用于矢量之上, 这一步骤是没有根据的. 于是, 当散度和旋度在其它坐标系中用 ∇ 算符表达的适合, 这种概念造成的错误就会逐渐暴露出来.

从物理意义上讲, 矢量的散度和旋度是不依赖与坐标系的选择的, 算符 “∇” 和矢量符号 “$\boldsymbol{F}$” 的形式可用于任何坐标系中. 也就是说, 如果上述算符 ∇ 与矢量形式的点乘和形式的叉乘的概念正确的化, 那么在任何坐标系下, 都可以将矢量的散度和旋度表示为算子 ∇ 和矢量 $\boldsymbol{F}$ 之间的点乘和叉乘.

在正交坐标系下, 假定矢量的散度是一个点积, 则

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \left(\sum_i \frac{\hat{\boldsymbol{u}}_i}{h_i}\frac{\partial}{\partial v_i}\right) \cdot \boldsymbol{F} = \sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial F_i}{\partial v_i} \tag{2.26}$$

其中, h_i 是度量因子, $\hat{\boldsymbol{u}}_i$ 是 i 坐标轴上的单位矢量, v_i 是相应的坐标变量. 例如, 对于球坐标系, $\hat{\boldsymbol{u}}_i = (\hat{\boldsymbol{u}}_r, \hat{\boldsymbol{u}}_\theta, \hat{\boldsymbol{u}}_\varphi)$, $v_i = (r, \theta, \varphi)$, $h_i = (1, r, r\sin\theta)$, 则 ∇ 算符与矢量 $\boldsymbol{F}$ 的点乘为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial r}F_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}F_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial \varphi}F_\varphi$$

而用正确方法求得的球坐标系下的矢量 $\boldsymbol{F}$ 的散度表达式为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}F_\varphi$$

显然, $\nabla\cdot\boldsymbol{F}\neq\operatorname{div}\boldsymbol{F}$. 类似的运算也可以说明 $\nabla\times\boldsymbol{F}\neq\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$. Morse 等发现, 若要用点乘和叉乘表达散度和旋度, 则在正交曲线坐标系中, 同一个 ∇ 算符表示梯度和散度, 必须具有不同的形式, 才能得到正确的结果, 即

$$\nabla=\sum_i\frac{\hat{\boldsymbol{u}}_i}{h_i}\cdot\frac{\partial}{\partial v_i}\qquad\text{(对于梯度)}$$

$$\nabla=\sum_i\frac{1}{\Omega}\hat{\boldsymbol{u}}_i\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{\Omega}{h_i}\right)\qquad\text{(对于散度)}$$

式中, $\Omega=\prod_i h_i$. 而且要按照下述计算步骤才能得到正确的结果:

$$\left[\sum_i\frac{1}{\Omega}\hat{\boldsymbol{u}}_i\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{\Omega}{h_i}\right)\right]\cdot\boldsymbol{F}\to\frac{1}{\Omega}\sum_i\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{\Omega}{h_i}\hat{\boldsymbol{u}}_i\cdot\boldsymbol{F}\right)$$

上述现象说明, 不能简单使用 ∇ 算符的同一形式, 而且还要加上没有根据的规则才能得到散度表达式的正确结果. 此外, 运算中还要对含 ∇ 的表达式做出一些运算方法的规则. 例如

$$\begin{aligned}\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})&=(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}-(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}\\&=(\nabla\cdot\boldsymbol{B}_c)\boldsymbol{A}+(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}_c-(\nabla\cdot\boldsymbol{A}_c)\boldsymbol{B}-(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}_c\end{aligned}$$

式中下标 c 表示该矢量对于算子而言是常矢量.

上式中第一步运算把 ∇ 看成矢量, 利用矢量恒等式得到; 第二步把 ∇ 看成微分符号, 根据两函数乘积的微分法则得出. 从所得结果看, $(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}$ 不是 $(\operatorname{div}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}$ 而是 $(\nabla\cdot\boldsymbol{B}_c)\boldsymbol{A}+(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}_c$. 再者, 按规定 $\boldsymbol{B}_c$ 是常矢量, $\nabla\cdot\boldsymbol{B}_c=0$, 会得到错误结果, 于是在传统的矢量分析中, 为了避免这一错误, 不得不规定算子 ∇ 必须作用于变矢量, 故将 $(\nabla\cdot\boldsymbol{B}_c)\boldsymbol{A}$ 改为 $(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$. 这种处理虽然可以得到正确的结果, 但没有合理的解释.

2.2.2 新算符的引入

戴振铎教授通过分析 ∇ 算子在矢量场论中出现的问题, 发现其错误的根源在于 ∇ 只是梯度算子, 而散度和旋度算子根本不是 ∇ 与其它算子的复合, 而是独立的. 戴振铎教授引入了两个新符号 $\mathrlap{\nabla}{\,\cdot}$ 和 $\mathrlap{\nabla}{\,\times}$ 分别表示散度和旋度算子. 在笛卡尔坐标系中原有的梯度算子 ∇ 和新引入的算子

分别定义为:

$$\triangledown = \sum_i \hat{\boldsymbol{x}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.27a}$$

$$\dot{\triangledown} = \sum_i \hat{\boldsymbol{x}}_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.27b}$$

$$\overset{\times}{\triangledown} = \sum_i \hat{\boldsymbol{x}}_i \times \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.27c}$$

在正交曲线坐标系中, $\triangledown$、$\dot{\triangledown}$ 和 $\overset{\times}{\triangledown}$ 分别定义为

$$\triangledown = \sum_i \frac{\hat{\boldsymbol{u}}_i}{h_i} \frac{\partial}{\partial v_i} \tag{2.28a}$$

$$\dot{\triangledown} = \sum_i \frac{\hat{\boldsymbol{u}}_i}{h_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.28b}$$

$$\overset{\times}{\triangledown} = \sum_i \frac{\hat{\boldsymbol{u}}_i}{h_i} \times \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.28c}$$

$\triangledown$、$\dot{\triangledown}$ 和 $\overset{\times}{\triangledown}$ 具有不依赖坐标系选择的性质.

2.2.3 符号矢量方法

90 年代, 戴振铎教授正式提出 “符号矢量” 方法, 并形成了系统理论. 其核心思想是引入符号矢量 $\triangledown$, 并将 $\triangledown$ 的表达式 $T(\triangledown)$ 定义为

$$T\triangledown = \lim_{\triangle V \to 0} \frac{\oiint_s T(\hat{\boldsymbol{n}})\, \mathrm{d}S}{\triangle V} \tag{2.29}$$

式中, $\triangle V$ 是任意小体积, S 是包围 $\triangle V$ 的表面, $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是 S 面上面元 $\mathrm{d}S$ 的单位外法线矢量. $T(\triangledown)$ 是一个符号表达式, 包含一个符号矢量 $\triangledown$. 将一个有意义的矢量表达式中的某个矢量用矢量 $\triangledown$ 代替就得到了一个符号表达式. 例如, 选择 $T(\triangledown) = \boldsymbol{F} \cdot \triangledown$, 那么 $T(\hat{\boldsymbol{n}})$ 的形式就被限定为 $\boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$, 于是

$$\boldsymbol{F} \cdot \triangledown = \lim_{\triangle V \to 0} \frac{\oiint_s \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S}{\triangle V} = \mathrm{div}\, \boldsymbol{F} = \sum_i \hat{\boldsymbol{x}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_i} \tag{2.30}$$

如果选择 $T(\triangledown) = \triangledown \cdot \boldsymbol{F}$, 结果不变, 因为 $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$, 因此

$$\triangledown \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F} \cdot \triangledown = \dot{\triangledown} \boldsymbol{F} \tag{2.31}$$

上述结论正好符合散度的定义, 而这个作用是通过符号矢量 $\triangledown$ 与 $\boldsymbol{F}$ 的点乘来表达的. 如果

选择 $T(\nabla)$ 的形式为 $f\nabla$ 或 ∇f, 由式 (2.29) 可以得到梯度表达式

$$\triangledown f = f\nabla = \nabla f \tag{2.32}$$

如果选择 $T(\nabla) = \nabla \times \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F} \times \nabla$, 可得旋度表达式

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F} \times \nabla = \triangledown \boldsymbol{F} \tag{2.33}$$

上述结论也是显见成立的. 对于三维体积 $\triangle V$, $\oiint_s \boldsymbol{F} \times \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S$ 是 $\boldsymbol{F}$ 沿表面的最大流量, 其随 $\triangle V$ 趋于零 ($\triangle V \to \triangle S, S \to l$) 便过渡到二维的最大环量面密度, 即 $\boldsymbol{F}$ 的旋度. 同理, 对于标量场 f, 其在某点的最大变化率的大小与方向即为 f 的梯度. 由 $\oiint_s f\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S$ 得到的是 f 增加最快的方向, 取极限就得到了标量场 f 在该点的梯度 $\triangledown f$.

由以上分析可知, 符号矢量 ∇ 可以作为梯度算子 $\triangledown$, 散度算子 $\triangledown$ 以及旋度选择 $\triangledown$ 的生成矢量.

在正交曲线坐标系下, 通过推导, 可以得到如下的计算 $T(\nabla)$ 的表达式:

$$T(\nabla) = \frac{1}{\Omega} \sum \frac{\partial}{\partial v_i} \left[\frac{\Omega}{h_i} T(\hat{\boldsymbol{u}}_i) \right] \tag{2.34}$$

利用以下的关系式

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\Omega}{h_i} \hat{\boldsymbol{u}}_i \right) = 0 \tag{2.35}$$

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{u}}_i}{\partial v_i} = -\left[\frac{1}{h_j} \frac{\partial h_i}{\partial v_j} \hat{\boldsymbol{u}}_j + \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial v_k} \hat{\boldsymbol{u}}_k \right] \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{u}}_i}{\partial v_j} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial v_i} \hat{\boldsymbol{u}}_j, \quad (i \neq j) \tag{2.37}$$

于是有

$$\triangledown \boldsymbol{F} = \frac{1}{\Omega} \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\Omega}{h_i} F_i \right) \tag{2.38}$$

$$\triangledown \boldsymbol{F} = \frac{1}{\Omega} \sum_{i,j,k} h_i \hat{\boldsymbol{u}}_i \left[\frac{\partial (h_k F_k)}{\partial v_j} - \frac{\partial (h_j F_j)}{\partial v_k} \right] \tag{2.39}$$

其中, $i, j, k = 1, 2, 3$ 顺序循环取值.

引理 2.2.1 对于任意 $T(\nabla)$ 表达式, 式中的符号矢量 ∇ 可以作为一个矢量, 矢量代数中的恒等式均适用.

引理 2.2.2 对含有两个函数的符号表达式，有

$$T(\nabla, a, b) = T(\nabla_a, a, b) + T(\nabla_b, a, b) \tag{2.40}$$

其中，∇_a 和 ∇_b 是两个部分符号矢量，简单来讲，就是仅对 a(或 b) 进行微分运算．其定义如下:

$$T(\nabla_a, a, b) = \lim_{\triangle V \to 0} \frac{\left[\oiint_s T(\hat{\boldsymbol{n}}, a, b)\,\mathrm{d}S\right]_{b=const}}{\triangle V} \tag{2.41}$$

在正交曲线坐标系下，上式可化为

$$T(\nabla_a, a, b) = \frac{1}{\Omega} \sum \frac{\partial}{\partial v_i} \left[\frac{\Omega}{h_i} T(\hat{\boldsymbol{u}}_i, a, b)\right]_{b=const} \tag{2.42}$$

利用符号矢量方法推导矢量分析中的恒等式，不仅可以获得正确的结果，而且过程非常清晰．如推导 rot($\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$)：

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \nabla_A \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) + \nabla_B \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$$

由引理 1，根据三重矢量叉乘公式有:

$$\begin{aligned}
\nabla_A \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) &= (\nabla_A \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{A} - (\nabla_A \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} \\
&= (\boldsymbol{B} \cdot \nabla_A)\boldsymbol{A} - (\nabla_A \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} \\
&= \boldsymbol{B} \cdot \nabla \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \nabla \boldsymbol{A}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

这是根据 ∇ 的矢量性，因而有 $\nabla_A \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \nabla_A$．同理有

$$\nabla_B \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \nabla \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} \cdot \nabla \boldsymbol{B}$$

因此

$$\nabla(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot \nabla \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \nabla \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} \cdot \nabla \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \nabla \boldsymbol{A} \tag{2.44}$$

2.2.4 其它常用运算及矢量恒等式

f 的 Laplace 运算式:

$$\nabla \nabla f = \sum_i \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\Omega}{h_i^2} \frac{\partial f}{\partial v_i}\right) \tag{2.45}$$

$\boldsymbol{F}$ 的 Laplace 运算式:

$$\nabla\nabla\boldsymbol{F} = \sum_i \frac{1}{\Omega}\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{\Omega}{h_i^2}\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial v_i}\right) = \nabla\nabla\boldsymbol{F} - \nabla\!\!\!\times\nabla\!\!\!\times\boldsymbol{F} \tag{2.46}$$

常用坐标系下的标量 Laplace 算子:

圆柱坐标系

$$\nabla\nabla \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

圆球坐标系

$$\begin{aligned}\nabla\nabla \equiv&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\ =&\frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + \sin\varphi\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\\ =&\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\varphi}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.\end{aligned}$$

单位矢量的导数:

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{u}}_j}{\partial v_k} = \frac{1}{h_j}\frac{\partial h_k}{\partial v_j}\hat{\boldsymbol{u}}_k \tag{2.47}$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{u}}_i}{\partial v_i} = -\left(\frac{1}{h_j}\frac{\partial h_i}{\partial v_j}\hat{\boldsymbol{u}}_j + \frac{1}{h_k}\frac{\partial h_i}{\partial v_k}\hat{\boldsymbol{u}}_k\right) \tag{2.48}$$

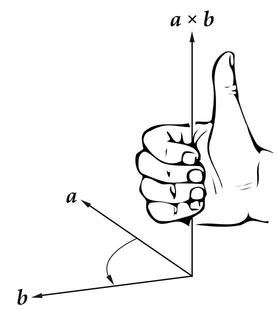

图 2.2 矢量的叉乘

矢量恒等式

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \tag{2.49}$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{2.50}$$

Lagrange 恒等式 $\quad (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}$ (2.51)

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{d} \tag{2.52}$$

$$\nabla(ab) = a\nabla b + b\nabla a \tag{2.53}$$

$$\nabla(a\boldsymbol{b}) = a\nabla\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\nabla a \tag{2.54}$$

$$\nabla\!\!\!\times(a\boldsymbol{b}) = \nabla a\times\boldsymbol{b} + a\nabla\!\!\!\times\boldsymbol{b} \tag{2.55}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}\cdot\nabla\times\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\boldsymbol{b} \tag{2.56}$$

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times\nabla\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\times\nabla\times\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} \tag{2.57}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\nabla\cdot\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\nabla\cdot\boldsymbol{a} \tag{2.58}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) - \nabla\cdot\nabla\boldsymbol{a} \tag{2.59}$$

$$\nabla\times(\nabla a) = 0 \tag{2.60}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a}) = 0 \tag{2.61}$$

证明 证明式 (2.56).

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= \nabla_a\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) + \nabla_b\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\ &= \boldsymbol{b}\cdot(\nabla_a\times\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}\cdot(\nabla_b\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}\cdot\nabla\times\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\boldsymbol{b}.\blacksquare\end{aligned} \tag{2.62}$$

证明 证明式 (2.57)[3].

$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) &= \nabla_a(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}) + \nabla_b(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\\ &= (\boldsymbol{b}\cdot\nabla_a)\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\nabla_a) + (\boldsymbol{a}\cdot\nabla_b)\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\nabla_b)\\ &= (\boldsymbol{b}\cdot\nabla_a)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\times(\nabla_a\times\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a}\cdot\nabla_b)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times(\nabla_b\times\boldsymbol{b})\\ &= \boldsymbol{a}\times\nabla\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\times\nabla\times\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}. \quad \blacksquare\end{aligned} \tag{2.63}$$

2.3 并矢及其运算

2.3.1 并矢函数

如果两个矢量不是点乘或叉乘, 而是并乘, 就构成二阶张量, 也称为并矢, 定义为

$$\overline{\overline{\boldsymbol{D}}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \tag{2.64}$$

其中, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别称为 $\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}$ 的前元素和后元素. 或者, 考虑三个不同的矢量函数

$$\boldsymbol{D}_j = \sum_i D_{ij}\hat{\boldsymbol{x}}_i, \quad j = 1,2,3 \tag{2.65}$$

则并矢函数 $\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}$ 可定义为

$$\overline{\overline{\boldsymbol{D}}} = \sum_j \boldsymbol{D}_j\hat{\boldsymbol{x}}_j \tag{2.66}$$

其中 $\boldsymbol{D}_j$ 称为 $\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}$ 的三个矢量分量, 将式 (2.65) 代入式 (2.66), 则

$$\overline{\overline{\boldsymbol{D}}} = \sum_i \sum_j D_{ij} \hat{\boldsymbol{x}}_i \hat{\boldsymbol{x}}_j \tag{2.67}$$

定义并矢的转置 $(\overline{\overline{\boldsymbol{D}}})^{\mathrm{T}}$

$$(\overline{\overline{\boldsymbol{D}}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \sum_j \hat{\boldsymbol{x}}_j \boldsymbol{D}_j = \sum_i \sum_j D_{ij} \hat{\boldsymbol{x}}_j \hat{\boldsymbol{x}}_i = \sum_i \sum_j D_{ji} \hat{\boldsymbol{x}}_i \hat{\boldsymbol{x}}_j \tag{2.68}$$

定义并矢与矢量之间的前标积, 它是一个矢量:

$$\boldsymbol{C} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{D}}} = (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) = \sum_j (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D}_j)\hat{\boldsymbol{x}}_j = \sum_i \sum_j C_i D_{ij} \hat{\boldsymbol{x}}_j \tag{2.69}$$

定义并矢与矢量之间的后标积, 它是一个通常与前标积不相等的矢量:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\boldsymbol{D}}} \cdot \boldsymbol{C} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{A} \\ &= \sum_j \boldsymbol{D}_j (\hat{\boldsymbol{x}}_j \cdot \boldsymbol{C}) = \sum_i \sum_j C_i D_{ij} \hat{\boldsymbol{x}}_i = \sum_i \sum_j C_i D_{ji} \hat{\boldsymbol{x}}_j \end{aligned} \tag{2.70}$$

于是有

$$\boldsymbol{a} \cdot (\overline{\overline{\boldsymbol{D}}})^{\mathrm{T}} = \overline{\overline{\boldsymbol{D}}} \cdot \boldsymbol{a} \tag{2.71}$$

矢量与并矢之间同样可以做矢积, 定义矢量与并矢的前矢积:

$$\boldsymbol{C} \times \overline{\overline{\boldsymbol{D}}} = (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \sum_j (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}_j)\hat{\boldsymbol{x}}_j \tag{2.72}$$

而后矢量积定义为:

$$\overline{\overline{\boldsymbol{D}}} \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \sum_j \boldsymbol{D}_j (\hat{\boldsymbol{x}}_j \times \boldsymbol{C}) \tag{2.73}$$

将矢量混合积恒等式每一项分别后置 $\hat{\boldsymbol{x}}_j$, 将所得结果求和, 得到

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \bar{\bar{\boldsymbol{c}}}) = -\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \bar{\bar{\boldsymbol{c}}}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \bar{\bar{\boldsymbol{c}}} \tag{2.74}$$

若将后两项中的 $\boldsymbol{b}$ 变为并矢, 考虑三个独立的方程:

$$-(\boldsymbol{a} \times \bar{\bar{\boldsymbol{c}}}) \cdot \boldsymbol{b}_j = (\bar{\bar{\boldsymbol{c}}})^{\mathrm{T}} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_j) \tag{2.75}$$

再后置一个单位矢量 $\hat{\boldsymbol{x}}_j$, 将结果对 j 求和, 得到

$$-(\boldsymbol{a}\times\bar{\boldsymbol{c}})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{b} = (\bar{\boldsymbol{c}})^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{a}\times\bar{\bar{\boldsymbol{b}}}) \tag{2.76}$$

类似地, 可以得到

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\bar{\boldsymbol{c}}) = (\boldsymbol{a}\cdot\bar{\boldsymbol{c}})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\bar{\boldsymbol{c}} \tag{2.77}$$

$$\boldsymbol{a}\times\bar{\bar{\boldsymbol{b}}} = -\left[(\bar{\bar{\boldsymbol{b}}})^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{a}\right]^{\mathrm{T}} \tag{2.78}$$

并矢与并矢的点乘:

$$\boldsymbol{AB}\cdot(\boldsymbol{CD}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{D} \neq (\boldsymbol{CD})\cdot\boldsymbol{AB} \tag{2.79}$$

并矢之间有四种二重运算

$$\boldsymbol{AB}:\boldsymbol{CD} = (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}) \tag{2.80a}$$

$$\boldsymbol{AB}\overset{\cdot}{\times}\boldsymbol{CD} = (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{D}) \tag{2.80b}$$

$$\boldsymbol{AB}\overset{\times}{\cdot}\boldsymbol{CD} = (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}) \tag{2.80c}$$

$$\boldsymbol{AB}\overset{\times}{\times}\boldsymbol{CD} = (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{D}) \tag{2.80d}$$

2.3.2 并矢的分析

并矢的散度 $\nabla\cdot\bar{\bar{\boldsymbol{F}}}$ 定义为

$$\nabla\cdot\bar{\bar{\boldsymbol{F}}} = \sum_j(\nabla\cdot\boldsymbol{F}_j)\hat{\boldsymbol{x}}_j = \sum_i\sum_j\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j}\hat{\boldsymbol{x}}_j \tag{2.81}$$

它是一个矢量函数. 并矢函数的旋度定义为

$$\nabla\times\bar{\bar{\boldsymbol{F}}} = \sum_j(\nabla\times\boldsymbol{F}_j)\hat{\boldsymbol{x}}_j = \sum_i\sum_j(\nabla F_{ij}\times\hat{\boldsymbol{x}}_i)\hat{\boldsymbol{x}}_j \tag{2.82}$$

此处应用了矢量恒等式 $\nabla\times(F_{ij}\hat{\boldsymbol{x}}_j) = \nabla F_{ij}\times\hat{\boldsymbol{x}}_j$.

并矢函数的旋度是一个并矢函数. 一个矢量函数的梯度定义为

$$\nabla\boldsymbol{F} = \sum_j(\nabla F_j)\hat{\boldsymbol{x}}_j = \sum_i\sum_j\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\hat{\boldsymbol{x}}_i\hat{\boldsymbol{x}}_j \tag{2.83}$$

它是一个并矢.

若一个并矢函数是一单位并矢 $\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$ 和一个标量函数 f 的积, 即 $\overline{\overline{\boldsymbol{F}}} = f\,\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$, 则

$$\nabla\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{F}}} = \nabla\cdot(f\,\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}) = \sum_i \nabla\cdot(f\hat{\boldsymbol{x}}_i)\hat{\boldsymbol{x}}_i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\hat{\boldsymbol{x}}_i = \nabla f \tag{2.84}$$

且

$$\nabla\times\overline{\overline{\boldsymbol{F}}} = \nabla\times(f\,\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}) = \sum_i \nabla\times(f\hat{\boldsymbol{x}}_i)\hat{\boldsymbol{x}}_i = \sum_i (\nabla f \times \hat{\boldsymbol{x}}_i)\hat{\boldsymbol{x}}_i = \nabla f \times \overline{\overline{\boldsymbol{I}}} \tag{2.85}$$

并矢函数还具有下列计算公式:

$$\nabla(a\boldsymbol{b}) = a\nabla\boldsymbol{b} + (\nabla a)\boldsymbol{b} \tag{2.86}$$

$$\nabla\cdot(a\,\overline{\overline{\boldsymbol{b}}}) = a\nabla\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{b}}} + (\nabla a)\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{b}}} \tag{2.87}$$

$$\nabla\times(a\,\overline{\overline{\boldsymbol{b}}}) = a\nabla\times\overline{\overline{\boldsymbol{b}}} + (\nabla a)\times\overline{\overline{\boldsymbol{b}}} \tag{2.88}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\overline{\overline{\boldsymbol{a}}}) = \nabla(\nabla\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{a}}}) - \nabla\cdot(\nabla\,\overline{\overline{\boldsymbol{a}}}) \tag{2.89}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\overline{\overline{\boldsymbol{a}}}) = 0 \tag{2.90}$$

2.4 矢量和并矢积分定理

2.4.1 基本积分定理

对于矢量和并矢有下列熟知的积分定理:

1. Gauss / Остроградский 定理 (散度定理)

$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V = \oint\!\!\!\oint_S (\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{F})\,\mathrm{d}S \tag{2.91}$$

$$\iint_S \nabla_S\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}S = \oint_l (\hat{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{F})\,\mathrm{d}l, \quad (\hat{\boldsymbol{m}} = \hat{\boldsymbol{l}}\times\hat{\boldsymbol{n}}, \text{即面元边沿外法线单矢}) \tag{2.92}$$

$$\iiint_V \nabla\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}\,\mathrm{d}V = \oint\!\!\!\oint_S (\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{A}}})\,\mathrm{d}S \tag{2.93}$$

2. 旋度定理

$$\iiint_V \nabla\times\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V = \oint\!\!\!\oint_S (\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{F})\,\mathrm{d}S \tag{2.94}$$

$$\iint_S \nabla_S\times\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}S = \oint_l (\hat{\boldsymbol{m}}\times\boldsymbol{F})\,\mathrm{d}l \tag{2.95}$$

$$\iiint_V \nabla\times\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}\,\mathrm{d}V = \oint\!\!\!\oint_S (\hat{\boldsymbol{n}}\times\overline{\overline{\boldsymbol{A}}})\,\mathrm{d}S \tag{2.96}$$

3. 梯度定理

$$\iiint_V \nabla f \,\mathrm{d}V = \oiint_S \hat{\boldsymbol{n}} f \,\mathrm{d}S \tag{2.97}$$

$$\iint_S \nabla_S f \,\mathrm{d}S = \oint_l \hat{\boldsymbol{m}} f \,\mathrm{d}l \tag{2.98}$$

$$\iint_S \nabla_S \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}V = \oiint_S \hat{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}S \tag{2.99}$$

4. Stokes 定理

$$\iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}S = \oint_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.100}$$

$$\iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \overline{\overline{\boldsymbol{A}}} \,\mathrm{d}S = \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{A}}} \tag{2.101}$$

5. 叉积梯度定理

$$\iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla f \,\mathrm{d}S = \oint_L f \,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.102}$$

6. 叉 ∇ 叉积定理

$$\iint_S (\hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}S = \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{F} \tag{2.103}$$

2.4.2 Green 定理

若 f_1, f_2 在区域 V 及其闭合边界 S 具有一阶连续偏导, 在 V 内具有二阶连续偏导. 将 $f_1 \nabla f_2$ 代入 Gauss 公式, 有

$$\oiint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot f_1 \nabla f_2 \,\mathrm{d}S = \iiint_V \nabla \cdot (f_1 \nabla f_2) \,\mathrm{d}V = \iiint_V (f_1 \nabla\nabla f_2 + \nabla f_1 \cdot \nabla f_2) \,\mathrm{d}V \tag{2.104}$$

称为第一标量 Green 定理. 交换 f_1, f_2 并与原式相减, 得到

$$\iiint_V (f_1 \nabla\nabla f_2 - f_2 \nabla\nabla f_1) \,\mathrm{d}V = \oiint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot (f_1 \nabla f_2 - f_2 \nabla f_1) \,\mathrm{d}S \tag{2.105}$$

称为第二标量 Green 定理.

类似地, 将 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}_1 \times \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{F}_2$ 代入 Gauss 公式, 由式 (2.56), 有 $\nabla \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{F}_2 - \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{F}_2$, 于是可得第一矢量 Green 定理:

$$\iiint_V (\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{F}_2 - \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{F}_2) \,\mathrm{d}V = \oiint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\boldsymbol{F}_1 \times \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{F}_2) \,\mathrm{d}S \tag{2.106}$$

第二矢量 Green 定理:

$$\iiint_V (\boldsymbol{F}_1 \cdot \nabla\nabla \boldsymbol{F}_2 - \boldsymbol{F}_2 \cdot \nabla\nabla \boldsymbol{F}_1)\,\mathrm{d}V = \oiint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\boldsymbol{F}_2 \times \nabla \boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_1 \times \nabla \boldsymbol{F}_2)\,\mathrm{d}S \tag{2.107}$$

进一步地, 从矢量 Green 定理出发, 还可以得到它们的并矢形式. 在第一矢量 Green 定理中, 令 $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{P}, \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{Q}_j$ 代入, 并在每一项后并置 $\hat{\boldsymbol{x}}_j$, 得到三个方程后相加, 就得到第一矢量—并矢 Green 定理:

$$\iiint_V \left[(\nabla \boldsymbol{P}) \cdot (\nabla \overline{\overline{\boldsymbol{Q}}}) - \boldsymbol{P} \cdot \nabla\nabla \overline{\overline{\boldsymbol{Q}}}\right]\mathrm{d}V = \oiint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\boldsymbol{p} \times \nabla \overline{\overline{\boldsymbol{Q}}})\,\mathrm{d}S \tag{2.108}$$

另一种表达形式:

$$\iiint_V \left[(\nabla \overline{\overline{\boldsymbol{Q}}})^{\mathrm{T}} \cdot \nabla \boldsymbol{P} - (\nabla\nabla \overline{\overline{\boldsymbol{Q}}})^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{P}\right]\mathrm{d}V = \oiint_S (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{P}) \cdot \nabla \overline{\overline{\boldsymbol{Q}}}\,\mathrm{d}S = \oiint_S (\nabla \overline{\overline{\boldsymbol{Q}}})^{\mathrm{T}} \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{P})\,\mathrm{d}S \tag{2.109}$$

类似地, 由第二矢量 Green 定理, 可以导出第二矢量—并矢 Green 定理. 注意, 为了在 $\boldsymbol{Q}_j$ 后并置 $\hat{\boldsymbol{x}}_j$, 我们交换了式 (2.107) 右端第一项的叉乘次序. 于是有

$$\iiint_V \left[\boldsymbol{P} \cdot \nabla\nabla \overline{\overline{\boldsymbol{Q}}} - (\nabla\nabla \boldsymbol{P}) \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{Q}}}\right]\mathrm{d}V = -\oiint_S \left[(\hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla \boldsymbol{P}) \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{Q}}} + (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{P}) \cdot \nabla \overline{\overline{\boldsymbol{Q}}}\right]\mathrm{d}S \tag{2.110}$$

利用同样的方法将 $\boldsymbol{P}$ 升格为并矢, 得到第一并矢—并矢 Green 定理:

$$\iiint_V \left[(\nabla \overline{\overline{\boldsymbol{Q}}})^{\mathrm{T}} \cdot \nabla \overline{\overline{\boldsymbol{P}}} - (\nabla\nabla \overline{\overline{\boldsymbol{Q}}})^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{P}}}\right]\mathrm{d}V = \oiint_S (\nabla \overline{\overline{\boldsymbol{Q}}})^{\mathrm{T}} \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \overline{\overline{\boldsymbol{P}}})\,\mathrm{d}S \tag{2.111}$$

第二并矢—并矢 Green 定理:

$$\iiint_V \left[(\nabla\nabla \overline{\overline{\boldsymbol{Q}}})^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{P}}} - (\overline{\overline{\boldsymbol{Q}}})^{\mathrm{T}} \cdot \nabla\nabla \overline{\overline{\boldsymbol{P}}}\right]\mathrm{d}V = -\oiint_S \left[(\overline{\overline{\boldsymbol{Q}}})^{\mathrm{T}} \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla \overline{\overline{\boldsymbol{P}}}) + (\nabla \overline{\overline{\boldsymbol{Q}}})^{\mathrm{T}} \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \overline{\overline{\boldsymbol{P}}})\right]\mathrm{d}S \tag{2.112}$$