第 3 章 电磁场中的若干问题

3.1 电磁位函数

3.1.1 标量电位与矢量磁位

Maxwell 方程组在电荷和电流产生的时谐场中的矢量微分形式为 [29]:

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{3.1a}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{3.1b}$$
$$\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E}) = \rho \tag{3.1c}$$
$$\nabla\cdot(\mu\boldsymbol{H}) = 0 \tag{3.1d}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{J} = -\mathrm{j}\omega\rho \tag{3.1e}$$

由于磁感应强度是无散场, 因此它可以表示为一个矢量的旋度. 定义矢量位函数 $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{3.2}$$

代入 (3.1a), 有

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

即

$$\nabla\times(\boldsymbol{E} + \mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}) = 0$$

此式表明 $\boldsymbol{E} + \mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}$ 是无旋场, 可以用一个标量场的梯度来表示, 则 $\boldsymbol{E}$ 可表示为

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A} - \nabla\psi \tag{3.3}$$

将其代入 Maxwell 方程后并考虑 $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$, 整理后可得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A} = \mu\boldsymbol{J} + k^2\boldsymbol{A} + -\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\nabla\psi \tag{3.4}$$

对上式求散度, 并注意到 $\nabla\cdot\boldsymbol{J} = -\mathrm{j}\omega\rho$, 得到

$$\mathrm{j}\omega\nabla\times\boldsymbol{A} + \nabla\times\nabla\psi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{3.5}$$

由于此处仅规定了 $\boldsymbol{A}$ 的旋度, 必须再规定其散度才可唯一确定. 原则上说可任意规定,

在 Lorentz 规范下, 强制

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\psi = 0 \tag{3.6}$$

于是式 (3.4) 和 (3.5) 分别可简化为

$$\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{A} + k^2\boldsymbol{A} = -\mu\boldsymbol{J} \tag{3.7}$$

$$\nabla\cdot\nabla\psi + k^2\psi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{3.8}$$

于是有

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega(\boldsymbol{A} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}) \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{3.10}$$

利用标量格林函数表示的式 (3.7) 和式 (3.8) 积分解分别为:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mu\iiint_{V'}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V' \tag{3.11}$$

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon}\iiint_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V \tag{3.12}$$

其中

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{3.13}$$

此处引入的 $\boldsymbol{A}$ 称为矢量磁位, ψ 称为标量电位. 这样, Maxwell 方程式的求解就归结为求解两个位函数方程. 在某些情况下, 可以化简为求解标量 Helmholtz 方程, 使得 Maxwell 方程的求解更为简单.

3.1.2 标量磁位与矢量电位

相对于电荷及产生的电流产生的电磁场, 磁荷及磁流产生的电磁场方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{m}} = \mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}^{\mathrm{m}} \tag{3.14a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{m}} = -\boldsymbol{J}^{\mathrm{m}} - \mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}^{\mathrm{m}} \tag{3.14b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}^{\mathrm{m}} = \rho^{\mathrm{m}} \tag{3.14c}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}^{\mathrm{m}} = 0 \tag{3.14d}$$

由此可见, 此时电位移 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{m}}$ 是无散场, 可以表示为矢量的旋度, 令

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{m}} = -\nabla\times\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}} \tag{3.15}$$

代入式 (3.14a), 有

$$\nabla\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{m}} = -\mathrm{j}\omega\nabla\times\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}} \tag{3.16}$$

类似地, 可知 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{m}} + \mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}}$ 是无旋场, 可以用标量场旋度来表示, 故有

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{m}} = -\nabla\psi^{\mathrm{m}} - \mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}} \tag{3.17}$$

类似地, 可以导出矢量电位 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}}$ 和标量磁位 ψ^{m} 各自满足的方程

$$\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}} + k^2\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}} = -\varepsilon\boldsymbol{J}^{\mathrm{m}} \tag{3.18}$$

$$\nabla\cdot\nabla\psi^{\mathrm{m}} + k^2\psi^{\mathrm{m}} = -\frac{\rho^{\mathrm{m}}}{\varepsilon} \tag{3.19}$$

这里假定 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}}$ 和 ψ^{m} 之间满足

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}} = -\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\psi^{\mathrm{m}} \tag{3.20}$$

此式也称为 Lorentz 规范. 于是, 磁荷和磁流产生的电磁场可以仅用 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}}$ 来表示

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{m}} = -\nabla\times\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}} \tag{3.21}$$

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{m}} = -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}} - \mathrm{j}\frac{\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}}}{\omega\mu\varepsilon} \tag{3.22}$$

综上, 由电流和磁流共同产生的电磁场可以用矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 和矢量电位 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}}$ 共同表出:

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A} - \mathrm{j}\frac{\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}}{\omega\mu\varepsilon} - \frac{\nabla\times\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}}}{\varepsilon} \tag{3.23}$$

$$\boldsymbol{H} = -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}} - \mathrm{j}\frac{\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}}}{\omega\mu\varepsilon} + \frac{\nabla\times\boldsymbol{A}}{\mu} \tag{3.24}$$

3.1.3 Coulomb 规范

前两节中引入的标量位和矢量位并不是唯一的. 若规定另一矢量磁位 $\boldsymbol{A}'$,

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\varphi \tag{3.25}$$

其中 φ 为任一可微标量函数, 则有

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}'$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\left[\psi - \mathrm{j}\omega\varphi\right] - \mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}'$$

此时若规定另一标量电位函数

$$\psi' = \psi - \mathrm{j}\omega\varphi \tag{3.26}$$

则

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\psi' - \mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}'$$

式 (3.25) 和 (3.26) 称为规范变换, 函数 ψ 称为规范函数. 可见, 在上述规范变换下, 电磁场量与位函数之间的关系保持不变. 在电磁场中, 除 Lorentz 规范 (3.20) 外, 另有 Coulomb 规范. 此时规定矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 散度为 0. 即

$$\nabla\boldsymbol{A} = 0 \tag{3.27}$$

此时 $\boldsymbol{A}$ 和 ψ 满足的方程为

$$\nabla\nabla\boldsymbol{A} + k^2\boldsymbol{A} = -\mu\boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\nabla\psi \tag{3.28}$$

$$\nabla\nabla\psi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{3.29}$$

上述变换也完全适用于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}}$ 和 ψ^{m}.

3.1.4 Hertz 位

在求解某些场源激励的电磁场时, 使用 Hertz 位较为方便. Hertz 位分为电 Hertz 位 $\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{e}}$ 和磁 Hertz 位 $\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{m}}$. 电 Hertz 位和矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 之间的关系为

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\mu\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{e}} \tag{3.30}$$

此处的 $\boldsymbol{A}$ 满足 Lorentz 规范. 因此, 由式 (3.7) 可得 $\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{e}}$ 满足的微分方程

$$\nabla\nabla\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{e}} + \omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{e}} = -\frac{\boldsymbol{J}}{\mathrm{j}\omega\varepsilon} \tag{3.31}$$

将式 (3.30) 代入式 (3.9) 和 (3.10), 可得 $\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{e}}$ 和场量之间关系

$$\boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\nabla\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{e}} \tag{3.32}$$

$$\boldsymbol{E} = \nabla\nabla\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{e}} + k^2\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{e}} \tag{3.33}$$

类似地, 磁 Hertz 位与矢量电位 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}}$ 的关系为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\mu\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{m}} \tag{3.34}$$

这里 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}}$ 也符合 Lorentz 规范. 于是有

$$\nabla\nabla\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{m}}+\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{m}}=-\frac{\boldsymbol{J}^{\mathrm{m}}}{\mathrm{j}\omega\mu} \tag{3.35}$$

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{m}}$ 与场量之间关系为

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{m}}=-\mathrm{j}\omega\mu\nabla\times\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{m}} \tag{3.36}$$

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{m}}=\nabla\nabla\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{m}}+\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{m}} \tag{3.37}$$

若引入电极化矢量 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{e}}$ 和磁极化矢量 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{m}}$

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{e}}=\frac{\boldsymbol{J}}{\mathrm{j}\omega\varepsilon},\qquad \boldsymbol{P}^{\mathrm{m}}=\frac{\boldsymbol{J}^{\mathrm{m}}}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}$$

则式 (3.31) 和 (3.35) 可分别写为

$$\nabla\nabla\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{e}}+\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{e}}=-\frac{\boldsymbol{P}^{\mathrm{e}}}{\varepsilon} \tag{3.38}$$

$$\nabla\nabla\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{m}}+\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{m}}=-\frac{\boldsymbol{P}^{\mathrm{m}}}{\mu} \tag{3.39}$$

综上, 由电流及磁流共同产生的电磁场可由 Hertz 位表示为

$$\boldsymbol{E}=\nabla\nabla\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{e}}+\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{e}}-\mathrm{j}\omega\mu\nabla\times\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{m}} \tag{3.40}$$

$$\boldsymbol{H}=\nabla\nabla\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{m}}+\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{m}}+\mathrm{j}\omega\varepsilon\nabla\times\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{e}} \tag{3.41}$$

对于无源区中的电磁场, 由于两种 Hertz 位均满足齐次 Helmholtz 方程, 即

$$\nabla\nabla\boldsymbol{\Pi}+\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{\Pi}=0 \tag{3.42}$$

并利用矢量恒等式 $\nabla\nabla=\nabla\nabla-\nabla\times\nabla\times$, 代入式 (3.40) 及 (3.41), 则无源区的电磁场用 Hertz 位表示为

$$\boldsymbol{E}=\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{e}}-\mathrm{j}\omega\mu\nabla\times\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{m}} \tag{3.43}$$

$$\boldsymbol{H}=\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{m}}+\mathrm{j}\omega\varepsilon\nabla\times\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{m}} \tag{3.44}$$

当介质发生极化和磁化时, 可以认为上述电极化矢量和磁极化矢量分别是极化强度和磁化强度. 由此, 已知极化强度和磁化强度分布时, 利用 Hertz 位计算电磁场是很方便的.

3.1.5 Debye 位

若媒质是线性、均匀、各向同性的静止媒质, 在无源区中, $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 均满足矢量齐次 Helmholtz 方程. 在直角坐标系下, $\hat{\boldsymbol{x}}$、$\hat{\boldsymbol{y}}$、$\hat{\boldsymbol{z}}$ 均为常矢量, $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 各分栏均满足标量齐次 Helmholtz 方程, 可以将 E_x, E_y 及 H_x, H_y 用 E_z 和 H_z 表示出来:

$$
\begin{aligned}
E_x &= \frac{1}{k^2-k_z^2}\left(-\mathrm{j}k_z\frac{\partial E_z}{\partial x} - \mathrm{j}\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)\\
E_y &= \frac{1}{k^2-k_z^2}\left(-\mathrm{j}k_z\frac{\partial E_z}{\partial y} + \mathrm{j}\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\\
H_x &= \frac{1}{k^2-k_z^2}\left(\mathrm{j}\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y} - \mathrm{j}k_z\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\\
H_y &= \frac{1}{k^2-k_z^2}\left(-\mathrm{j}\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x} - \mathrm{j}k_z\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

其中 k_z 是 $\boldsymbol{k}$ 的 z 方向分量. 在圆柱坐标系下, 虽然 $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ 是变矢量, 但 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 是常矢量, E_z 和 H_z 仍然满足标量齐次 Helmholtz 方程, 可将 E_ρ, E_φ 及 H_ρ, H_φ 用 E_z 和 H_z 表示出来.

$$
\begin{aligned}
E_\rho &= -\frac{1}{k_\rho^2}\left(\mathrm{j}k_z\frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \mathrm{j}\frac{\omega\mu}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}\right)\\
E_\varphi &= \frac{1}{k_\rho^2}\left(-\mathrm{j}\frac{k_z}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + \mathrm{j}\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\\
H_\rho &= \frac{1}{k_\rho^2}\left(\mathrm{j}\frac{\omega\varepsilon}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \mathrm{j}k_z\frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\\
H_\varphi &= -\frac{1}{k_\rho^2}\left(\mathrm{j}\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \mathrm{j}\frac{k_z}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}\right)
\end{aligned}
$$

这样在圆柱坐标系中, 矢量齐次 Helmholtz 方程的求解也归结为求解标量齐次 Helmholtz 方程. 上述方法在求解无限长导波系统中的场分布时是非常有效的. 通常取 z 轴为导播方向, E_z 和 H_z 称为纵向分量, 因此上述方法称为纵向场法.

在球坐标系中, 由于 $\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ 均为变矢量, 必须引入 Debye 位, 才可将矢量齐次 Helmholtz 方程的求解也归结为标量齐次 Helmholtz 方程的求解.

在球坐标系中, 任何电磁场均可分解为对于 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 方向的 TM 和 TE 波两部分, 两者之和构成球坐标系中的完备解. 由上一节 (3.43) 和 (3.44) 可知, $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{m}}$, $\boldsymbol{H}\perp\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{e}}$, 若令 $\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{m}}$ 及 $\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{e}}$ 方向均为 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 即

$$\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{m}} = \boldsymbol{\Pi}_r^{\mathrm{m}} = \hat{\boldsymbol{r}}\,\Pi_r^{\mathrm{m}} \tag{3.45}$$

$$\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{\Pi}_r^{\mathrm{e}} = \hat{\boldsymbol{r}}\,\Pi_r^{\mathrm{e}} \tag{3.46}$$

则这样的径向磁 Hertz 位 $\boldsymbol{\Pi}_r^{\mathrm{m}}$ 可以代表 TE 波, 而径向电 Hertz 位 $\boldsymbol{\Pi}_r^{\mathrm{e}}$ 可以代表 TM 波. 将上

二式代入 (3.40) 和 (3.41), 有

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{\partial^2 \Pi_r^{\mathrm{m}}}{\partial r^2} + k^2 \Pi_r^{\mathrm{e}} \\
E_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Pi_r^{\mathrm{e}}}{\partial r \partial \theta} - \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{r\sin\theta}\frac{\partial \Pi_r^{\mathrm{m}}}{\delta\theta} \\
E_\varphi &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 \Pi_r^{\mathrm{e}}}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{r}\frac{\partial \Pi_r^{\mathrm{m}}}{\partial\theta} \\
H_r &= \frac{\partial^2 \Pi_r^{\mathrm{e}}}{\partial r^2} + k^2 \Pi_r^{\mathrm{m}} \\
H_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Pi_r^{\mathrm{m}}}{\partial r \partial \theta} + \frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{r\sin\theta}\frac{\partial \Pi_r^{\mathrm{e}}}{\delta\theta} \\
H_\varphi &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 \Pi_r^{\mathrm{m}}}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{r}\frac{\partial \Pi_r^{\mathrm{e}}}{\partial\theta}
\end{aligned}
$$

换言之, 上述 TE 及 TM 波可用 Π_r^{m} 和 Π_r^{e} 分别表示为

$$
\mathrm{TE}\begin{cases}
\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\left(-\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{r\sin\theta}\frac{\partial \Pi_r^{\mathrm{m}}}{\partial\varphi}\right) + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\left(\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{r}\frac{\partial \Pi_r^{\mathrm{m}}}{\partial\theta}\right) \\
\boldsymbol{H} = \hat{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\partial^2 \Pi_r^{\mathrm{m}}}{\partial r^2} + k^2 \Pi_r^{\mathrm{m}}\right) + \hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Pi_r^{\mathrm{m}}}{\partial r \partial\theta}\right) + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 \Pi_r^{\mathrm{m}}}{\partial r \partial\varphi}\right)
\end{cases} \tag{3.47}
$$

以及

$$
\mathrm{TM}\begin{cases}
\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\partial^2 \Pi_r^{\mathrm{e}}}{\partial r^2} + k^2 \Pi_r^{\mathrm{e}}\right) + \hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Pi_r^{\mathrm{e}}}{\partial r \partial\theta}\right) + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 \Pi_r^{\mathrm{e}}}{\partial r \partial\varphi}\right) \\
\boldsymbol{H} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{r\sin\theta}\frac{\partial \Pi_r^{\mathrm{e}}}{\partial\varphi}\right) + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\left(-\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{r}\frac{\partial \Pi_r^{\mathrm{e}}}{\partial\theta}\right)
\end{cases} \tag{3.48}
$$

代入无源区域的 Maxwell 方程, 可以验证, 有下述方程成立

$$
\nabla\nabla\left(\frac{\Pi_r^{\mathrm{e}}}{r}\right) + k^2\left(\frac{\Pi_r^{\mathrm{e}}}{r}\right) = 0 \tag{3.49}
$$

$$
\nabla\nabla\left(\frac{\Pi_r^{\mathrm{m}}}{r}\right) + k^2\left(\frac{\Pi_r^{\mathrm{m}}}{r}\right) = 0 \tag{3.50}
$$

由此可见, 若令

$$
u = \frac{\Pi_r^{\mathrm{e}}}{r}, \qquad v = \frac{\Pi_r^{\mathrm{m}}}{r} \tag{3.51}
$$

则标量函数 u 和 v 均满足标量齐次 Helmholtz 方程, 称为 Debye 位. 求出 Debye 位后, 分别乘以 r, 即可得相应 Hertz 位 Π_r^{e} 和 Π_r^{m}, 进而可得到 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 在球坐标下的各个分量.

3.2 矢量波函数

3.2.1 矢量波函数的引入

我们知道, 通过复介电常数 $\hat{\varepsilon} = \varepsilon - \mathrm{j}\sigma/\omega$, 其中 σ 是介质的导电率. 可以得到矢量 Helmholtz 方程:

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E} - \omega^2\mu\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E} = 0 \tag{3.52a}$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H} - \omega^2\mu\hat{\varepsilon}\boldsymbol{H} = 0 \tag{3.52b}$$

这两个方程完全对称且独立. 求解特定边界条件和辐射条件下的矢量 Helmholtz 方程, 可以描述电磁波的传播特性. 然而, 通常来讲这些方程不易求解. 但是, 求解标量 Helmholtz 方程的方法非常成熟, 在介质中, 有

$$\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t) + k^2\psi(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{3.53}$$

在一般正交曲线坐标系中, $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 可以通过分离变量求得. 我们假使已经获得了一组完备的标量解 $\{\psi\}$, 引入衍射方程

$$\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{G} - \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{G} + k^2\boldsymbol{G} = 0 \tag{3.54}$$

其中 $k^2 = \omega^2\mu\hat{\varepsilon}$. $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都满足此衍射方程, 故式 (3.54) 是满足 Maxwell 方程的. 定义一个矢量函数, 是函数 ψ 的梯度:

$$\boldsymbol{L} = \nabla\psi \tag{3.55}$$

若 ψ 是式 (3.53) 的解, $\boldsymbol{L}$ 满足式 (3.54):

$$\begin{aligned}
&\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{L} - \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{L} + k^2\boldsymbol{L}\\
=&\nabla(\nabla\cdot\nabla\psi) - \nabla\times\nabla\times\nabla\psi + k^2\nabla\psi\\
=&\nabla(\nabla^2\psi + k^2\psi) \quad (\text{由于 } \nabla\times\nabla\psi = 0)\\
=&0
\end{aligned}$$

另设有矢量函数 $\boldsymbol{M}$, 具有零散度, $\nabla\cdot\boldsymbol{M} = 0$, 且是 (3.54) 的解. 又设 $\boldsymbol{N} = \frac{1}{k}\nabla\times\boldsymbol{M}$. 设在均匀介质中, k 为常数, 于是有

$$\begin{aligned}
&\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{N} - \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{N} + k^2\boldsymbol{N}\\
=&\frac{1}{k}\left[\nabla(\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{M}) - \nabla\times\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{M} + k^2\nabla\times\boldsymbol{M}\right]\\
=&\nabla\times\left(-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{M} + k^2\boldsymbol{M}\right)\\
=&\nabla\times\left(\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{M} - \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{M} + k^2\boldsymbol{M}\right)\\
=&0
\end{aligned}$$

由此证明了 $\boldsymbol{N}$ 同样满足衍射方程,且有 $\nabla\boldsymbol{N}=0$. 由 $\boldsymbol{N}=\frac{1}{k}\nabla\boldsymbol{M}$,两边取旋度,代入式 (3.54),可以证明 $\boldsymbol{M}=\frac{1}{k}\nabla\boldsymbol{N}$. 显然,一般来说 $\boldsymbol{L}$ 的旋度不为零,故 $\boldsymbol{L}$ 与 $\{\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}\}$ 线性无关. 于是,我们可以构造多组 $\{\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}\}$.

譬如,我们考虑 $\boldsymbol{M}=\nabla\boldsymbol{a}\psi$,其中 ψ 是给定标量解, $\boldsymbol{a}$ 称为领示矢量. 又有 $\boldsymbol{L}=\nabla\psi$,故 $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{L}=0$,即 $\boldsymbol{L}$ 与 $\boldsymbol{M}$ 正交. 故给定式 (3.53) 的可数无穷多解系 $\{\psi_n\}$,并具有连续偏导数,就可得到对应的一组三个互相不共面的满足式 (3.54) 的矢量解 $\{\boldsymbol{L}_n,\boldsymbol{M}_n,\boldsymbol{N}_n\}$. 可以证明 $\{\boldsymbol{L}_n,\boldsymbol{M}_n,\boldsymbol{N}_n\}$ 是完备的.

3.2.2 矢量波函数基

$\{\boldsymbol{L}_n,\boldsymbol{M}_n,\boldsymbol{N}_n\}$ 的完备性保证了对波矢量展开时具有唯一确定系数. 例如,在球极坐标系中,标量 Helmholtz 方程的解为[43]

$$\psi_{mn}(r,\theta,\varphi)\sim z_n(kr)P_n^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi} \tag{3.56}$$

其中, z_n 代表球 Bessel 函数 $j_n(kr)$ 或第一类球 Hankel 函数 $h_n^{(1)}(kr)$. 由于球 Hankel 函数在原点处发散,故包含原点的区域仅可用球 Bessel 函数来表征场,不包含原点的区域则可以有两种函数构成. 我们可以得到 $\boldsymbol{L},\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$ 函数的解析表示:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_{mn}=\nabla\psi_{mn}=k\Bigg\{&\frac{\mathrm{d}\,z_n(kr)}{\mathrm{d}\,(kr)}P_n^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi}\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{z_n(kr)}{kr}\frac{\mathrm{d}\,P_n^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\times\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi}\hat{\boldsymbol{\theta}}\\&-\mathrm{j}m\frac{z_n(kr)}{kr}\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\boldsymbol{M}_{mn}=-\mathrm{j}mz_n(kr)\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi}\hat{\boldsymbol{\theta}}-z_n(kr)\frac{\mathrm{d}\,P_n^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}_{mn}=n(n+1)\frac{z_n(kr)}{kr}P_n^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi}\hat{\boldsymbol{r}}&+\frac{1}{kr}\frac{\mathrm{d}rz_n(kr)}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}\,P_n^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi}\hat{\boldsymbol{\theta}}\\&-\mathrm{j}m\frac{1}{kr}\frac{\mathrm{d}rz_n(kr)}{\mathrm{d}r}\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\end{aligned} \tag{3.59}$$

3.3 并矢格林函数

3.3.1 并矢格林函数的引出

利用标量格林函数可以简化标量位的表示,也可以局部地表示矢量位的每一个直角分量. 然而矢量场比矢量位出现更多分量,用标量格林函数难以简洁地表出. 如果仅仅引入格林函数的矢量形式,在矢量格林函数与矢量源相乘时会出现困难,不能符合物理实际. 于是提出了并矢格林函数及其运算规则[60].

考虑 Maxwell 方程组式 (3.1a)∼(3.1e), 将它们分别加上下标 j, $(j = 1, 2, 3)$, 考虑它们为三个不同的电流分布产生的三组时谐场. 在上式两端分别后置单位矢量 $\hat{\boldsymbol{x}}_j$, 并将三个方程叠加, 就可以得到 Maxwell 方程的并矢形式:

$$\nabla\times\overline{\overline{\boldsymbol{E}}} = -\mathrm{j}\omega\mu\,\overline{\overline{\boldsymbol{H}}} \tag{3.60a}$$

$$\nabla\times\overline{\overline{\boldsymbol{H}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{J}}} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\,\overline{\overline{\boldsymbol{E}}} \tag{3.60b}$$

$$\nabla\cdot(\varepsilon\,\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}) = \boldsymbol{\rho} \tag{3.60c}$$

$$\nabla\cdot(\mu\,\overline{\overline{\boldsymbol{H}}}) = 0 \tag{3.60d}$$

$$\nabla\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{J}}} = -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{\rho} \tag{3.60e}$$

注意电荷密度函数 $\boldsymbol{\rho}$ 含有三个不同的标量电荷分布.

消去 Maxwell 方程中的 $\boldsymbol{H}$ 或 $\boldsymbol{E}$ 可以得到的 Helmholtz 方程:

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \tag{3.61a}$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) - k^2\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \tag{3.61b}$$

其中, $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$. 且场必须满足这些问题所要求的边界条件. 一般情况下, 我们用 $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_\mathrm{e}$ 和 $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_\mathrm{m}$ 分别表示电并矢格林函数和磁并矢格林函数, 它们分别是下列微分方程的解:

$$\nabla\times\nabla\times\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_\mathrm{e}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - k^2\,\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_\mathrm{e}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \overline{\overline{\boldsymbol{I}}}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{3.62a}$$

$$\nabla\times\nabla\times\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_\mathrm{m}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - k^2\,\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_\mathrm{m}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \nabla\times\left[\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\right] \tag{3.62b}$$

令

$$\boldsymbol{J}_j = \frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{x}}_j, \quad j = 1, 2, 3. \tag{3.63}$$

并有

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \iiint_V \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V' \tag{3.64}$$

于是

$$\nabla\times\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_\mathrm{e} = \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_\mathrm{m} \tag{3.65}$$

$$\nabla\times\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_\mathrm{m} = \overline{\overline{\boldsymbol{I}}}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + k^2\,\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_\mathrm{e} \tag{3.66}$$

$$\nabla\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_\mathrm{e} = -\frac{1}{k^2}\nabla\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{3.67}$$

$$\nabla\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_\mathrm{m} = 0 \tag{3.68}$$

3.3.2 并矢格林函数的解

I. Helmholtz 方程的解

考虑方程 (3.61a) 的积分解. 利用第二矢量—并矢 Green 定理 (式 (2.110)), 令 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, $\overline{\overline{\boldsymbol{Q}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$, 有

$$\begin{aligned}&\iiint_V \left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \triangledown\triangledown\, \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - \left[\triangledown\triangledown \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\right] \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\right\} \mathrm{d}V \\ &\qquad = -\oiint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \times \triangledown\, \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') + \left[\triangledown \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\right] \times \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\right\} \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{3.69}$$

代入式 (3.61a) 和式 (3.62a), 并注意到

$$\iiint_V \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \overline{\boldsymbol{I}}\, \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, \mathrm{d}V = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') \tag{3.70}$$

再用 $-\mathrm{j}\omega\mu \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 替换 $\triangledown \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, 可以得到两种面积分形式:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') + \mathrm{j}\omega\mu \iiint_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}) \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\, \mathrm{d}V \\ &= -\oiint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \times \triangledown\, \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') + \left[\triangledown \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\right] \times \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\right\} \mathrm{d}S \\ &= \oiint_S \left\{\left[-\mathrm{j}\omega\mu \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\right] \cdot \left[\hat{\boldsymbol{n}} \times \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\right] - \left[\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\right] \cdot \triangledown\, \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\right\} \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{3.71}$$

对偶地, 可以得到 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ 的表达式, 并注意到式 (3.65), 有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}') + \mathrm{j}\omega\mu \iiint_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}) \cdot \triangledown\, \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\, \mathrm{d}V \\ &\qquad = \oiint_S \left\{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \cdot \left[\hat{\boldsymbol{n}} \times \triangledown\, \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\right] + \mathrm{j}\omega\varepsilon\left[\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\right] \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\right\} \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{3.72}$$

这里, $\boldsymbol{r}$ 是源点矢量, $\boldsymbol{r}'$ 是场点矢量.

II. 边界条件

电并矢格林函数和磁并矢格林函数不是独立的, 只要求解一个即可. 根据边界条件不同, 电并矢格林函数可以分为以下几类:

1. 无界空间电并矢格林函数, 记为 $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}0}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$. 由于格林函数是点源产生的场, 考虑无限大球面 S_∞ 所界定的区域, 由 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{x}}_1$ 产生的矢量位:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{-\mathrm{j}\omega} G_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{x}}_1 \tag{3.73}$$

于是由式 (**??**)

$$\boldsymbol{E}_{01}(\boldsymbol{r}) = \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}01}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \left(1+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{x}}_1 \tag{3.74}$$

将 $\hat{\boldsymbol{x}}_1$ 分别替换为 $\hat{\boldsymbol{x}}_2$ 和 $\hat{\boldsymbol{x}}_3$, 将三式后分别并置 $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ 后相加

$$\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}0}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_i \left(1+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{x}}_i\hat{\boldsymbol{x}}_i \tag{3.75}$$

又注意到

$$\nabla\left[G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}\,\right] = \nabla G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{3.76}$$

于是得到

$$\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}0}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \left(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{3.77}$$

2. 第一类 (Dirichlet) 并矢边界条件, 记为 $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}1}$. 满足

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\big|_{S_d} = 0 \tag{3.78}$$

此时式 (3.71) 简化为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') + \mathrm{j}\omega\mu\iiint_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V = -\oiint_{S_d}\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\right]\cdot\nabla\,\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S \tag{3.79}$$

若 S_d 是一理想电壁, 则上式中 $\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$, 面积分为零, 即得到

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') = -\mathrm{j}\omega\mu\iiint_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V \tag{3.80}$$

若 S_d 是一个开孔的导电面, 体外无电流源, 在求解导体面外问题时, 式 (3.71) 就简化为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') = -\iint_{S_A}\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\right]\cdot\nabla\,\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S \tag{3.81}$$

其中 S_A 是柱上的口径面, 即理想磁壁. 给定口径场分布, 利用 $\nabla\,\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 就可以计算柱外场分布.

3. 第二类 (Neumann) 边界并矢边界条件, 记为 $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}2}$. 满足

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\nabla\,\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}2}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\big|_{S_d} = 0 \tag{3.82}$$

代入 (3.72) 中, 可简化得到

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}') - \iiint_V \boldsymbol{J}\boldsymbol{r} \cdot \triangledown \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}2}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V = +\mathrm{j}\omega\varepsilon \oiint_{S_d} \left[\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\right] \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}2}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S \tag{3.83}$$

若 S_d 为理想电壁, 有

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}') = \iiint_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \cdot \triangledown \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}2}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V \tag{3.84}$$

若 S_d 为开孔导体面, 且体外无电流源, 则

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}') = +\mathrm{j}\omega\varepsilon \iint_{S_A} \left[\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\right] \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}2}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S \tag{3.85}$$

若使用第二类磁并矢格林函数 $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{m}2}$, 则边界条件即为 Dirichlet 形式:

$$\hat{\boldsymbol{n}} \times \triangledown \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{m}2}\big|_{S_d} = 0 \tag{3.86}$$

且 $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{m}2} = \triangledown \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}1}$ 是一个有旋并矢函数, $\triangledown \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{m}2} = 0$. 可以较方便求得 $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}1}$.

3.3.3 并矢格林函数的对称性

可以导出并矢格林函数具有如下对称性关系:

$$\left[\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}0}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\right]^{\mathrm{T}} = \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}0}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}0}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) \tag{3.87a}$$

$$\left[\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{m}0}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\right]^{\mathrm{T}} = \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{m}0}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{m}0}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) \tag{3.87b}$$

$$\left[\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}1}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\right]^{\mathrm{T}} = \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}1}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tag{3.87c}$$

$$\left[\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}2}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\right]^{\mathrm{T}} = \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}2}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tag{3.87d}$$

$$\left[\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{m}1}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\right]^{\mathrm{T}} = \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{m}2}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tag{3.87e}$$

$$\left[\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{m}2}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\right]^{\mathrm{T}} = \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{m}1}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tag{3.87f}$$

$$\left[\triangledown' \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}0}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\right]^{\mathrm{T}} = \triangledown \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}0}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tag{3.87g}$$

$$\left[\triangledown' \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{m}0}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\right]^{\mathrm{T}} = \triangledown \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{m}0}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tag{3.87h}$$

$$\left[\triangledown' \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}1}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\right]^{\mathrm{T}} = \triangledown \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}2}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tag{3.87i}$$

$$\left[\triangledown' \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}2}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\right]^{\mathrm{T}} = \triangledown \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}1}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tag{3.87j}$$

$$\left[\triangledown' \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{m}1}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\right]^{\mathrm{T}} = \triangledown \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{m}1}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tag{3.87k}$$

$$\left[\triangledown' \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{m}2}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\right]^{\mathrm{T}} = \triangledown \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{m}2}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tag{3.87l}$$

有了上述对称关系, 就可以将 I 的方程中的 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 互换, 用 $\boldsymbol{r}$ 作为场点位置矢量, 用 $\boldsymbol{r}'$ 作为

源点位置矢量, 将公式变为如下形式:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\mathrm{j}\omega\mu\iiint_{V'}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}1}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V'=-\oiint_{S_d}\left[\hat{\boldsymbol{n}}'\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\right]\cdot\nabla'\,\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}1}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}S' \tag{3.88}$$

于是公式可写成

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\mathrm{j}\omega\mu\iiint_{V'}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V'-\oiint_{S_d}\left[\nabla\,\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\mathrm{e}2}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]\cdot\left[\hat{\boldsymbol{n}}'\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S' \tag{3.89}$$

3.4 积分方程

3.4.1 标量方程

格林函数就是一个点源的响应, 在静电问题中, 就是点源产生的电位[10,24]. 按照线性叠加原理, 一个金属导体表面电荷引起的总电势应为:

$$\psi(\boldsymbol{r})=\int_{S'}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\sigma(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S' \tag{3.90}$$

其中 $\sigma(\boldsymbol{r}')$ 是金属表面的电荷密度.

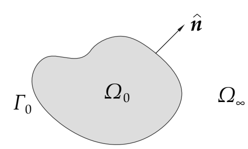

图 3.1　二维物体 Ω_0, 具有边界 Γ_0, 无限介质 Ω_∞

考虑嵌在无限大介质中, 源 $f(\boldsymbol{\rho})$ 产生的标量波, 介质中还嵌有某一形状的物体. 如图 3.1 所示. 假设源和物体沿 z 轴都不变, 这样我们仅需要考虑垂直于 z 轴的平面. 波函数 $\psi(\boldsymbol{\rho})$ 满足非齐次 Helmholtz 方程:

$$\nabla\nabla\psi(\boldsymbol{\rho})+k^2\psi(\boldsymbol{\rho})=-f(\boldsymbol{\rho}),\quad \boldsymbol{\rho}\in\Omega_\infty \tag{3.91}$$

其中, k 为波数, Ω_∞ 是外边界. 同时波函数应当满足辐射条件, 表示波向外传播而不受到反射:

$$\sqrt{\rho}\left[\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\rho})}{\partial\rho}+\mathrm{j}k\psi(\boldsymbol{\rho})\right]=0,\quad \rho\to\infty \tag{3.92}$$

为了求得此问题的积分方程解, 我们引入满足非齐次 Helmholtz 方程的格林函数

$$\nabla\nabla G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')+k_0^2G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')=-\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}') \tag{3.93}$$

此方程的解为熟知的 无界空间的标量格林函数 G_0

$$G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') = \frac{1}{4\mathrm{j}}\mathrm{H}_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|) \tag{3.94}$$

将式 (3.91) 乘以 G_0, 式 (3.93) 乘以 ψ, 求差后在整个外域上积分, 得到

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_\infty}\left[G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\nabla^2\psi(\boldsymbol{\rho}) - \psi(\boldsymbol{\rho})\nabla^2 G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\right]\mathrm{d}\Omega \\ = \iint_{\Omega_\mathrm{s}} G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') f(\rho)\,\mathrm{d}\Omega + \iint_{\Omega_\infty}\psi(\boldsymbol{\rho})\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')\,\mathrm{d}\Omega\end{aligned} \tag{3.95}$$

其中 Ω_s 表示 $f(\boldsymbol{\rho})$ 的源区. 应用第二标量格林定理

$$\iint_\Omega (a\nabla^2 b - b\nabla^2 a)\,\mathrm{d}\Omega = \oint_\Gamma\left(a\frac{\partial b}{\partial n} - b\frac{\partial a}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Gamma$$

其中 Γ 代表包含 Ω 的边界, 我们有

$$\int_{\Gamma_0+\Gamma_\infty}\left[\psi(\boldsymbol{\rho})\frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')}{\partial n} - G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\rho})}{\partial n}\right]\mathrm{d}\Gamma - \iint_{\Omega_\mathrm{s}} G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') f(\boldsymbol{\rho})\,\mathrm{d}\Omega = \iint_{\Omega_\infty}\psi(\boldsymbol{\rho})\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')\,\mathrm{d}\Omega \tag{3.96}$$

Γ_0 代表目标的表面, Γ_∞ 代表半径趋于无穷大的圆. 由于 G_0 和 ψ 都满足辐射条件, 沿 Γ_∞ 的边界积分为 0. 利用 Dirac 函数的定义, 我们得到

$$\oint_{\Gamma_0}\left[\psi(\boldsymbol{\rho})\frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')}{\partial n} - G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\rho})}{\partial n}\right]\mathrm{d}\Gamma - \iint_{\Omega_\mathrm{s}} G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') f(\boldsymbol{\rho})\,\mathrm{d}\Omega = \begin{cases}\psi(\boldsymbol{\rho}'), & \boldsymbol{\rho}'\in\Omega_\infty \\ 0 & \boldsymbol{\rho}\in\Omega_0\end{cases} \tag{3.97}$$

Ω_0 代表物体的内部区域. 利用 G_0 的对称性将 $\boldsymbol{\rho}$ 和 $\boldsymbol{\rho}'$ 互换, 我们得到

$$\oint_{\Gamma_0}\left[\psi(\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} - G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}\Gamma' - \iint_{\Omega_\mathrm{s}} G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') f(\boldsymbol{\rho}')\,\mathrm{d}\Omega' = \begin{cases}\psi(\boldsymbol{\rho}), & \boldsymbol{\rho}\in\Omega_\infty \\ 0 & \boldsymbol{\rho}\in\Omega_0\end{cases} \tag{3.98}$$

若考虑散射问题, 在自由空间中, 没有物体, 则沿边界的积分为零. 于是

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) = -\iint_{\Omega_\mathrm{s}} G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') f(\boldsymbol{\rho}')\,\mathrm{d}\Omega'$$

我们我们称之为入射波, 记为 $\psi^{inc}(\boldsymbol{\rho})$. 于是可得到任意位置波函数的积分表示:

$$\psi^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{\rho})+\int_{\Gamma_0}\left[\psi(\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'}-G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}\Gamma'=\begin{cases}\psi(\boldsymbol{\rho}), & \boldsymbol{\rho}\in\Omega_\infty\\ 0 & \boldsymbol{\rho}\in\Omega_0\end{cases}\tag{3.99}$$

式 (3.99) 是在物体表面建立关于 ψ 和 $\partial\psi/\partial n$ 的积分方程的基础, 下面我们讨论五种情况:

I. 不可穿透的硬表面

所谓不可穿透的硬表面即 ψ 满足 Dirichlet 条件:

$$\psi(\boldsymbol{\rho})=0,\quad \boldsymbol{\rho}\in\Gamma_0\tag{3.100}$$

于是式 (3.99) 化为

$$\psi^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{\rho})-\oint_{\Gamma_0}G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'}\,\mathrm{d}\Gamma'=\begin{cases}\psi(\boldsymbol{\rho}), & \boldsymbol{\rho}\in\Omega_\infty\\ 0 & \boldsymbol{\rho}\in\Omega_0\end{cases}\tag{3.101}$$

对 Γ_0 应用此方程, 得到:

$$\oint_{\Gamma_0}G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'}\,\mathrm{d}\Gamma'=\psi^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{\rho}),\quad \boldsymbol{\rho}\in\Gamma_0\tag{3.102}$$

即在 Γ_0 上对 $\partial\psi/\partial n$ 的积分方程.

II. 不可穿透的软表面

所谓不可穿透的软表面即 ψ 满足 Neumann 条件:

$$\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\rho})}{\partial n}=0,\quad \boldsymbol{\rho}\in\Gamma_0\tag{3.103}$$

式 (3.99) 化为

$$\psi^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{\rho})+\oint_{\Gamma_0}\psi(\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'}\,\mathrm{d}\Gamma'=\begin{cases}\psi(\boldsymbol{\rho}), & \boldsymbol{\rho}\in\Omega_\infty\\ 0 & \boldsymbol{\rho}\in\Omega_0\end{cases}\tag{3.104}$$

对 Γ_0 应用此方程, 得到:

$$\frac{1}{2}\psi(\boldsymbol{\rho})-⨍_{\Gamma_0}\psi(\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'}\,\mathrm{d}\Gamma'=\psi^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{\rho}'),\quad \boldsymbol{\rho}\in\Gamma_0\tag{3.105}$$

其中 $\fint$ 代表除去奇点 $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}'$ 的积分, 称为**主值积分**[1]. 这一结果表明, 式 (3.103) 围绕 $\varGamma_0$ 的积分可以分解为围绕 $\boldsymbol{\rho}_0$ 的小半圆积分与剩余部分积分之和. 若 ρ 从外部逼近 $\varGamma_0$, 在趋于零的小半圆上的积分可以求得为 $\psi(\boldsymbol{\rho})/2$. 若 ρ 从内部逼近 $\varGamma_0$, 积分为 $-\psi(\boldsymbol{\rho})/2$. 无论何种情况, 都可表示为式 (3.105).

III. 不可穿透的混合边界

物体表面满足边界条件:

$$\frac{\partial \psi(\boldsymbol{\rho})}{\partial n} + \gamma \psi(\boldsymbol{\rho}) = 0, \quad \boldsymbol{\rho} \in \varGamma_0 \tag{3.106}$$

方程 (3.99) 化为:

$$\psi^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{\rho}) + \oint_{\varGamma_0} \psi(\boldsymbol{\rho}') \left[\gamma G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') + \frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} \right] \mathrm{d}\varGamma' = \begin{cases} \psi(\boldsymbol{\rho}), & \boldsymbol{\rho} \in \varOmega_\infty \\ 0 & \boldsymbol{\rho} \in \varOmega_0 \end{cases} \tag{3.107}$$

对 $\varGamma_0$ 应用上式, 得到

$$\frac{1}{2}\psi(\boldsymbol{\rho}) - \fint_{\varGamma_0} \psi(\boldsymbol{\rho}') \left[\gamma G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') + \frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} \right] \mathrm{d}\varGamma' = \psi^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho} \in \varGamma_0 \tag{3.108}$$

IV. 可穿透的均匀物体

如果物体是可穿透且均匀的, 我们对 $\varGamma_0$ 应用式 (3.99), 得到

$$\frac{1}{2}\psi(\boldsymbol{\rho}) - \fint_{\varGamma_0} \left[\psi(\boldsymbol{\rho}') \frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} - G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} \right] \mathrm{d}\varGamma' = \psi^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho} \in \varGamma_0 \tag{3.109}$$

为了在 $\varGamma_0$ 上求解 ψ 和 $\partial\psi/\partial n$, 我们需要考虑物体内部, 并得到另一个方程:

$$\frac{1}{2}\psi(\boldsymbol{\rho}) - \fint_{\varGamma_0} \left[G_0^*(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} - \psi(\boldsymbol{\rho}') \frac{\partial G_0^*(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} - \right] \mathrm{d}\varGamma' = 0, \quad \boldsymbol{\rho} \in \varGamma_0 \tag{3.110}$$

其中

$$G_0^*(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \frac{1}{4\mathrm{j}} \mathrm{H}_0^{(2)}(k^* |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) \tag{3.111}$$

k^* 是物体内部的波数.

---

[1] 主值积分 (Cauchy Principal Value Integral), 定义为

$$\fint_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x \right]$$

$$\fint_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x$$

V. 可穿透的非均匀物体

首先我们考虑 $\varGamma_0$ 外的区域得到式 3.98, 随后考虑物体内部的波动方程, 满足 Helmholtz 方程

$$\nabla\left[u(\boldsymbol{\rho})\nabla\psi(\boldsymbol{\rho})\right]+k_0^2 v(\boldsymbol{\rho})\psi(\boldsymbol{\rho})=0 \tag{3.112}$$

其中 $u(\boldsymbol{\rho})$ 和 $v(\boldsymbol{\rho})$ 表征了内部节制的特性. 为了求得 ψ 的积分方程, 将式 (3.112) 乘上 G_0 并在 $\varOmega_0$ 上积分

$$\iint_{\varOmega_0}\left\{G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\nabla\left[u(\boldsymbol{\rho})\nabla\psi(\boldsymbol{\rho})\right]+k_0^2 v(\boldsymbol{\rho})G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\psi(\boldsymbol{\rho})\right\}\mathrm{d}\varOmega=0 \tag{3.113}$$

然后利用矢量运算性质

$$\nabla(G_0 u\nabla\psi)=G_0\nabla(u\nabla\psi)+u\nabla\psi\cdot\nabla G_0$$

以及二维散度定理, 式 3.113 可以写为

$$\iint_{\varOmega_0}\left[k_0^2 v(\boldsymbol{\rho})G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\psi(\boldsymbol{\rho})-u(\boldsymbol{\rho})\nabla\psi(\boldsymbol{\rho})\cdot\nabla G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\right]\mathrm{d}\varOmega+\oint_{\varGamma_0}G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')u(\boldsymbol{\rho})\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\rho})}{\partial n}\,\mathrm{d}\varGamma=0 \tag{3.114}$$

代入矢量运算性质

$$\nabla(u\psi\nabla G_0)=u\psi\nabla^2 G_0+u\nabla\psi\cdot\nabla G_0+\nabla u\cdot(\psi\nabla G_0)$$

并应用二维散度定理, 式 3.114 化为

$$\begin{aligned}\iint_{\varOmega_0}&\left\{k_0^2 v(\boldsymbol{\rho})G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\psi(\boldsymbol{\rho})+u(\boldsymbol{\rho})\psi(\boldsymbol{\rho})\nabla^2 G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')+\nabla u(\boldsymbol{\rho})\cdot\left[\psi(\boldsymbol{\rho})\nabla G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\right]\right\}\mathrm{d}\varOmega\\&+\oint_{\varGamma_0}\left[u(\boldsymbol{\rho})G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\rho})}{\partial n}-u(\boldsymbol{\rho})\psi(\boldsymbol{\rho})\frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')}{\partial n}\right]\mathrm{d}\varGamma=0\end{aligned} \tag{3.115}$$

将式 3.93 代入上式得到

$$\begin{aligned}k_0^2&\iint_{\varOmega_0}\left[v(\boldsymbol{\rho})-u(\boldsymbol{\rho})\right]\psi(\boldsymbol{\rho})G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\,\mathrm{d}\varOmega+\iint_{\varOmega_0}\nabla u(\boldsymbol{\rho})\cdot\left[\psi(\boldsymbol{\rho})\nabla G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\right]\mathrm{d}\varOmega\\&+\oint_{\varGamma_0}\left[u(\boldsymbol{\rho})G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\rho})}{\partial n}-u(\boldsymbol{\rho})\psi(\boldsymbol{\rho})\frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')}{\partial n}\right]\mathrm{d}\varGamma=\begin{cases}u(\boldsymbol{\rho}')\psi(\boldsymbol{\rho}') & \boldsymbol{\rho}'\in\varOmega_0\\0 & \boldsymbol{\rho}'\in\varOmega_\infty\end{cases}\end{aligned} \tag{3.116}$$

利用格林函数对称性将 $\boldsymbol{\rho}$ 和 $\boldsymbol{\rho}'$ 互换, 得

$$k_0^2 \iint_{\Omega_0} \left[v(\boldsymbol{\rho}') - u(\boldsymbol{\rho}')\right]\psi(\boldsymbol{\rho}')G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\,\mathrm{d}\Omega' + \iint_{\Omega_0} \nabla' u(\boldsymbol{\rho}')\cdot\left[\psi(\boldsymbol{\rho}')\nabla' G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\right]\mathrm{d}\Omega'$$
$$+ \oint_{\Gamma_0}\left[u(\boldsymbol{\rho}')G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} - u(\boldsymbol{\rho}')\psi(\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}\Gamma' = \begin{cases} u(\boldsymbol{\rho})\psi(\boldsymbol{\rho}) & \boldsymbol{\rho}\in\Omega_0 \\ 0 & \boldsymbol{\rho}\in\Omega_\infty \end{cases} \tag{3.117}$$

由于边界条件要求场 ψ 和 $u(\partial\psi/\partial n)$ 在 Γ_0 连续, 我们可以结合式 (3.98) 和式 3.117, 得到不含场的法向导数的积分方程

$$\psi^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{\rho}) + k_0^2 \iint_{\Omega_0} \left[v(\boldsymbol{\rho}') - u(\boldsymbol{\rho}')\right]\psi(\boldsymbol{\rho}')G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\,\mathrm{d}\Omega' + \iint_{\Omega_0} \nabla' u(\boldsymbol{\rho}')\cdot\left[\psi(\boldsymbol{\rho}')\nabla' G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\right]\mathrm{d}\Omega'$$
$$+ \oint_{\Gamma_0}\left[1-u(\boldsymbol{\rho}')\right]\psi(\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}'}{\partial n'}\,\mathrm{d}\Gamma' = \begin{cases} u(\boldsymbol{\rho})\psi(\boldsymbol{\rho}) & \boldsymbol{\rho}\in\Omega_0 \\ 0 & \boldsymbol{\rho}\in\Omega_\infty \end{cases} \tag{3.118}$$

称为**体 – 面积分方程** (VSIE). 式 (3.118) 可处理 $u(\boldsymbol{\rho})$ 在 Ω_0 中连续的问题. 对于 Ω_0 包含两种或更多非均匀媒质, 并在界面 Γ_{d} 处 $u(\boldsymbol{\rho})$ 存在不连续的情况, 式 (3.118) 左端须包含线积分

$$\int_{\Gamma_{\mathrm{d}}} \left[u(\boldsymbol{\rho}_+) - u(\boldsymbol{\rho}_-)\right]\psi(\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'_{\mathrm{d}}}\,\mathrm{d}\Gamma'$$

其中 $\hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{d}}$ 从 “$-$” 指向 “$+$”. 若 Γ_0 包含 Ω_{c} 不可穿透区域, 则应包含线积分项

$$\oint_{\Gamma_{\mathrm{c}}}\left[\delta_{\mathrm{e}} u(\boldsymbol{\rho}')G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'_{\mathrm{c}}} - \delta_{\mathrm{h}} u(\boldsymbol{\rho}')\psi(\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'_{\mathrm{c}}}\right]\mathrm{d}\Gamma'$$

其中 $\hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{c}}$ 指向 Ω_{c} 内部, 且 δ_{e} 和 δ_{h} 分别定义为

$$\delta_{\mathrm{e}} = \begin{cases} 0 & \text{软边界} \\ 1 & \text{硬边界} \end{cases}, \quad \delta_{\mathrm{h}} = \begin{cases} 0 & \text{硬边界} \\ 1 & \text{软边界} \end{cases}$$

3.4.2 矢量方程

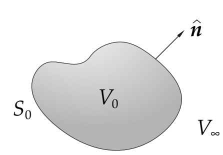

图 3.2　在无限空间 V_∞ 中的三维物体 V_0, 边界 S_0

考虑具有一个确定形状物体的无限大各向同性空间中电流密度 $\boldsymbol{J}_i$ 产生的电磁场 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$. 如

图 3.2 所示. $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 满足矢量波动方程:

$$\bar{\nabla}\bar{\nabla}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in V_\infty \tag{3.119}$$

$$\bar{\nabla}\bar{\nabla}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) - k^2\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \bar{\nabla}\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in V_\infty \tag{3.120}$$

式中 V_∞ 指外域. 利用第二矢量格林定理

$$\iiint_V (\boldsymbol{b}\cdot\bar{\nabla}\bar{\nabla}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\cdot\bar{\nabla}\bar{\nabla}\boldsymbol{b})\,\mathrm{d}V = \oiint_S (\boldsymbol{a}\times\bar{\nabla}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\times\bar{\nabla}\boldsymbol{a})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S$$

若令 $\boldsymbol{b} = \hat{\boldsymbol{b}}b$, 其中 $\hat{\boldsymbol{b}}$ 是单位矢量, 通过推导可以得到

$$\iiint_V \left[b\bar{\nabla}\bar{\nabla}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\nabla^2 b + (\bar{\nabla}\boldsymbol{a})\nabla b\right]\mathrm{d}V = \oiint_S \left[(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{a})\nabla b + (\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{a})\times\nabla b + (\hat{\boldsymbol{n}}\times\bar{\nabla}\boldsymbol{a})b\right]\mathrm{d}S \tag{3.121}$$

此式可称为标量 – 矢量格林定理. 令 $V = V_\infty$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{H}$, $b = G_0$, 代入式 (3.121), 并利用式 (3.119) 和式 (3.120), 可导出以下积分表示:

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}) - \oiint_{S_0}\left[(\hat{\boldsymbol{n}}'\cdot\boldsymbol{E})\nabla G_0 + (\hat{\boldsymbol{n}}'\times\boldsymbol{E})\times\nabla G_0 + \mathrm{j}\omega\mu(\hat{\boldsymbol{n}}'\times\boldsymbol{H})G_0\right]\mathrm{d}S' = \begin{cases}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r}\in V_\infty\\ 0, & \boldsymbol{r}\in V_0\end{cases} \tag{3.122}$$

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}) - \oiint_{S_0}\left[(\hat{\boldsymbol{n}}'\cdot\boldsymbol{H})\nabla G_0 + (\hat{\boldsymbol{n}}'\times\boldsymbol{E})\times\nabla G_0 - \mathrm{j}\omega\varepsilon(\hat{\boldsymbol{n}}'\times\boldsymbol{H})G_0\right]\mathrm{d}S' = \begin{cases}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r}\in V_\infty\\ 0, & \boldsymbol{r}\in V_0\end{cases} \tag{3.123}$$

其中

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}$ 和 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}$ 代表 $\boldsymbol{J}_i$ 在无界空间中产生的电场和磁场.

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{j}\omega\mu_0\iiint_{V_s}\left(\boldsymbol{J}_i G_0 + \frac{1}{k_0^2}\bar{\nabla}'\boldsymbol{J}_i\nabla G_0\right)\mathrm{d}V' \tag{3.124}$$

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}) = -\iiint_{V_s}\boldsymbol{J}_i\times\nabla G_0\,\mathrm{d}V' \tag{3.125}$$

为了方便表达, 我们定义算子

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{j}k\oiint_{S_0}\left(\boldsymbol{X}G_0 + \frac{1}{k_0^2}\bar{\nabla}'\boldsymbol{X}\nabla G_0\right)\mathrm{d}S' \tag{3.126a}$$

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{X}) = \oiint_{S_0} \boldsymbol{X} \times \nabla G_0 \, \mathrm{d}S' \tag{3.126b}$$

并引入等效表面电流和磁流:

$$\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}} = \hat{\boldsymbol{n}} \times \bar{\boldsymbol{H}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{M}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{E} \times \hat{\boldsymbol{n}} \tag{3.127}$$

于是式 (3.122) 和式 (3.123) 可写为

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}) - \mathbf{L}(\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}}) + \mathbf{K}(\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}) = \begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r} \in V_\infty \\ 0, & \boldsymbol{r} \in V_0 \end{cases} \tag{3.128}$$

$$\bar{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}) - \mathbf{K}(\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}}) - \mathbf{L}(\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}) = \begin{cases} \bar{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r} \in V_\infty \\ 0, & \boldsymbol{r} \in V_0 \end{cases} \tag{3.129}$$

式 (3.128) 和 (3.129) 是推导 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}$ 和 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}$ 积分方程的基础. 将此二式与 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 叉乘, 并让 $\boldsymbol{r}$ 趋近 S_0, 我们有

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) - \hat{\boldsymbol{n}} \times \mathbf{L}(\bar{\boldsymbol{J}})_{\mathrm{s}} + \hat{\boldsymbol{n}} \times \tilde{\mathbf{K}}(\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}) = -\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in S_0 \tag{3.130}$$

$$\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) + \hat{\boldsymbol{n}} \times \tilde{\mathbf{K}}(\bar{\boldsymbol{J}})_{\mathrm{s}} + \hat{\boldsymbol{n}} \times \mathbf{L}(\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}) = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in S_0 \tag{3.131}$$

其中 $\tilde{\mathbf{K}}$ 即 (3.126b) 中定义的 $\mathbf{K}$, 仅通过主值积分去除了 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$ 的奇点. 式 (3.130) 称为 **电场积分方程** (EFIE), 式 (3.131) 称为**磁场积分方程** (MFIE).

我们将二式结合, 整理得到**混合积分方程** (CFIE). 结合因子 α 一般为 $0 \sim 1$.

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\left[\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) + \hat{\boldsymbol{n}} \times \tilde{\mathbf{K}}(\bar{\boldsymbol{J}})_{\mathrm{s}} + \hat{\boldsymbol{n}} \times \mathbf{L}(\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}})\right] + \alpha\hat{\boldsymbol{n}} \times \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) - \hat{\boldsymbol{n}} \times \mathbf{L}(\bar{\boldsymbol{J}})_{\mathrm{s}} + \hat{\boldsymbol{n}} \times \tilde{\mathbf{K}}(\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}})\right] \\ = (1-\alpha)\,\hat{\boldsymbol{n}} \times \bar{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}) - \alpha\hat{\boldsymbol{n}} \times \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}\end{aligned} \tag{3.132}$$

I. 理想导体

若物体为理想导体, $\boldsymbol{E}$ 满足边界条件 $\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E} = 0, \boldsymbol{r} \in S_0$, 故 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}} = 0$, 于是式 (3.130) 和式 (3.131) 简化为

$$\hat{\boldsymbol{n}} \times \mathbf{L}(\bar{\boldsymbol{J}})_{\mathrm{s}} = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in S_0 \tag{3.133}$$

$$\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) + \hat{\boldsymbol{n}} \times \tilde{\mathbf{K}}(\bar{\boldsymbol{J}})_{\mathrm{s}} = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in S_0 \tag{3.134}$$

二式均可用来求解 $\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}}$. 然而, 对给定 S_0, 当外部介质无耗时, $\mathbf{L}$ 可能在某些频率上出现奇点,

利用 (3.133) 求解可能在这些频率上得到错误结果. 这称为**内谐振问题**, 奇异频率对应将区域 S_0 用外部介质填充后形成的谐振腔. 同样的问题也可能出现在 (3.134) 式中. 为了消除这一问题, 可采用混合积分方程

$$\alpha\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{n}}\times\mathbf{L}(\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}})+(1-\alpha)\left[\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r})+\hat{\boldsymbol{n}}\times\tilde{\mathbf{K}}(\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}})\right]=\alpha\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r})+(1-\alpha)\hat{\boldsymbol{n}}\times\bar{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{r}\in S_0 \tag{3.135}$$

这一结合产生了一个对应于具有阻抗壁和复数谐振频率腔体的积分算子. 故对于实数频率, 算子不会出现奇点.

II. 不可穿透物体具有阻抗边界

若物体为阻抗体, $\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}}$ 和 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}$ 之间就存在一个**阻抗边界条件**.

$$\boldsymbol{E}-(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E})\,\hat{\boldsymbol{n}}=\eta Z_0\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H} \tag{3.136}$$

或

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}=\eta Z_0\big[(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{H})\hat{\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{H}\big] \tag{3.137}$$

对于电流和磁流, 也即

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}=-\eta\hat{\boldsymbol{n}}\times\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}},\qquad \eta\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}}=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}} \tag{3.138}$$

将条件代入 (3.130) 和 (3.131), 即可得到只含有一个未知数的积分方程, 即可求得 $\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}}$ 或 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}$

$$\frac{1}{2}\eta\hat{\boldsymbol{n}}\times\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r})+\hat{\boldsymbol{n}}\times\mathbf{L}(\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}})+\eta\hat{\boldsymbol{n}}\times\tilde{\mathbf{K}}(\hat{\boldsymbol{n}}\times\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}})=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{r}\in S_0 \tag{3.139}$$

$$\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r})+\hat{\boldsymbol{n}}\times\tilde{\mathbf{K}}(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}})+\eta\hat{\boldsymbol{n}}\times\mathbf{L}(\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}})=\eta\hat{\boldsymbol{n}}\times\bar{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{r}\in S_0 \tag{3.140}$$

III. 可穿透的均匀物体

若物体是均匀的, 我们可以对物体内部应用标量 – 矢量格林定理, 得到另外两个方程

$$\eta\mathbf{L}_i(\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}})-\mathbf{K}_i(\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}})=\begin{cases}0 & \boldsymbol{r}\in V_\infty\\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) & \boldsymbol{r}\,in V_0\end{cases} \tag{3.141}$$

以及

$$\eta\mathbf{K}_i(\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}})+\mathbf{L}_i(\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}})=\begin{cases}0 & \boldsymbol{r}\in V_\infty\\ \eta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) & \boldsymbol{r}\,in V_0\end{cases} \tag{3.142}$$

其中 $\eta = \sqrt{\mu_r/\varepsilon_r}$ 且

$$\mathrm{L}_i(\boldsymbol{X}) = \mathrm{j}k \oiint_{S_0} \left(\boldsymbol{X} G_0 + \frac{1}{k^2} \nabla' \boldsymbol{X} \nabla G_0 \right) \mathrm{d}S' \tag{3.143a}$$

$$\mathrm{K}_i(\boldsymbol{X}) = \oiint_{S_0} \boldsymbol{X} \times \nabla G_0 \, \mathrm{d}S' \tag{3.143b}$$

其中 k 代表物体内波数. 将上式与 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 叉乘并让 $\boldsymbol{r}$ 趋近 S_0 于是有

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) + \eta \hat{\boldsymbol{n}} \times \mathrm{L}_i(\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}}) - \hat{\boldsymbol{n}} \times \tilde{\mathrm{K}}_i(\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}) = 0, \quad \boldsymbol{r} \in S_0 \tag{3.144}$$

$$\frac{1}{2}\eta \bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}} - \eta \hat{\boldsymbol{n}} \times \tilde{\mathrm{K}}_i(\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}}) - \hat{\boldsymbol{n}} \times \mathrm{L}_i(\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}) = 0, \quad \boldsymbol{r} \in S_0 \tag{3.145}$$

将上式与 (3.130) 或 (3.131) 联立即可解得 $\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}}$ 和 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}$. 类似地, 为了避免内谐振问题, 可以联立为混合积分方程:

$$(1-\alpha)\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) + \eta \hat{\boldsymbol{n}} \times \mathrm{L}_i(\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}}) - \hat{\boldsymbol{n}} \times \tilde{\mathrm{K}}_i(\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}})\right] + \alpha \hat{\boldsymbol{n}} \times \left[\frac{1}{2}\eta \bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}} - \eta \hat{\boldsymbol{n}} \times \tilde{\mathrm{K}}_i(\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}}) - \hat{\boldsymbol{n}} \times \mathrm{L}_i(\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}})\right] = 0 \tag{3.146}$$

仅在内部介质无耗时才需要. 此 CFIE 也可与外域 CFIE 联立以获得完整的方程. 更好的方法是将内域和外域的 EFIE 结合起来得到新的积分方程

$$\hat{\boldsymbol{n}} \times (\mathrm{L} + \eta \mathrm{L}_i)\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}} - \hat{\boldsymbol{n}} \times (\tilde{\mathrm{K}} + \tilde{\mathrm{K}}_i)\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}} = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in S_0 \tag{3.147}$$

并与内外域结合得到的 MFIE 联立使用

$$\hat{\boldsymbol{n}} \times (\tilde{\mathrm{K}} + \tilde{\mathrm{K}}_i)\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}} + \hat{\boldsymbol{n}} \times \left(\mathrm{L} + \frac{1}{\eta}\mathrm{L}_i\right)\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}} = \hat{\boldsymbol{n}} \times \bar{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in S_0 \tag{3.148}$$

这一方法是由 Poggio and Miller, Chang and Harrington, Wu and Tsai 提出的, 可以获得无内谐振的精确稳定解. 常被称为 PMCHWT 方法.

IV. 非均匀介质体

若物体为非均匀, 介电常数为 ε, 电导率为 μ, 则可将 Maxwell 方程改写为

$$\begin{cases} \nabla \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu_0 \boldsymbol{H} - \boldsymbol{M}_{\mathrm{eq}} \\ \nabla \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{eq}} + \boldsymbol{J}_i \end{cases} \quad \text{其中} \begin{cases} \boldsymbol{M}_{\mathrm{eq}} = \mathrm{j}\omega(\mu - \mu_0)\boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{J}_{\mathrm{eq}} = \mathrm{j}\omega(\varepsilon - \varepsilon_0)\boldsymbol{E} \end{cases} \tag{3.149}$$

易见我们可以将问题等效为自由空间中, ε_0 和 μ_0 条件下电流 $\boldsymbol{J}_i$、$\boldsymbol{J}_{\mathrm{eq}}$ 和 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{eq}}$ 的辐射. $\boldsymbol{J}_i$ 的辐射场可由 (3.124) 和 (3.125) 式得出. 类似地, 可以得出 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{eq}}$ 的辐射场 $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{J}_{\mathrm{eq}})$ 和 $\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{J}_{\mathrm{eq}})$. 由对

偶原理, 可以得出 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{eq}}$ 的辐射场

$$\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{M}_{\mathrm{eq}}) = \iiint_{V_0} \boldsymbol{M}_{\mathrm{eq}} \times \nabla G_0 \,\mathrm{d}V' \tag{3.150}$$

$$\boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{M}_{\mathrm{eq}}) = -\mathrm{j}\omega\varepsilon_0 \iiint_{V_0} \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{eq}} G_0 + \frac{1}{k_0^2} \nabla' \boldsymbol{M}_{\mathrm{eq}} \nabla G_0 \right) \mathrm{d}V' \tag{3.151}$$

于是总场就是这三者之和

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{J}_i) + \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{J}_{\mathrm{eq}}) + \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{M}_{\mathrm{eq}}) \tag{3.152}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{J}_i) + \boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{J}_{\mathrm{eq}}) + \boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{M}_{\mathrm{eq}}) \tag{3.153}$$

以上诸式通常称为**体积分方程** (VIEs).