附录 B　泛函基础

电磁场边值问题含电磁源分布、媒质及边界条件、电磁场分布三要素. 电磁场求解主要包含三类任务:

1. 媒质和边界条件 → 求可能存在的场分布模式;
2. 媒质和边条以及源分布 → 实际场分布;
3. 媒质和边条及实际场分布 → 源分布.

所有这些问题仅在某些极少数的情况 (简单媒质和边界条件) 下才有解析形式的严格解. 在大多数的实际问题中必须用数字解法求解近似解, 如变分法、矩量法、有限元法、边界元法、几何绕射法、有限差分法、直线法、小波法、传输线矩阵法 (TLM) 等. 这一部分要介绍的泛函方法, 可以包容与阐述一大类上述数字近似方法.

B.1 集合、映射与 Hilbert 空间

B.1.1 集合

I. 集合、元素的定义

集合 符合一定条件的单件事物所组成的整体. 其中的单件事物即元素. 含无穷多个元素的集合称为无穷集合.

函数理论中的集合分:

数 (组) 集 (即变量 (组) 所取值的集合)

函数集 (即函数所取形式的集合) . 如边值问题的本征函数是 (无穷) 函数集.

例 几何学中, 直线、曲线、曲面为点的集合.

数学分析中, 实数集, 连续函数集 …

II. 数值空间和函数空间 (集合的拓扑表示)

点表示元素, 空间表示集合 (形式集合) .

1. 数值空间: 数集的拓扑表示.

   n 变量组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — n 维抽象空间 $\mathbb{R}^n$ 的点集. 类似三维空间, 可定义:

   距离 点 X $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 与点 Y $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 之间的距离

$$P(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \tag{B.1}$$

体积 开区间 $\Omega(x)=\{x_i\in(a_i,b_i)|_{i=1,2,\cdots,n}\}$ 的体积为

$$|\Omega(x)|=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i) \tag{B.2}$$

可测数集 对应的数值空间具有确定的体积值的数集, 记作 $E(X)$.

2. 函数空间: 函数集的拓扑表示. 每个点都表示不同形式的函数.

   可测函数 可测数集 $E(X)$ 上的实函数 $f(x)$, 其函数值的任何范围所对应的自变量 x 的数集是可测数集, 则称为可测函数. 定义在同一可测数集 $E(X)$ 上的不同可测函数组成的函数集为可测函数集.

L^p 可积函数

1. $f(x)$ 在可测数集 $E(X)$ 上可测, 即 $f(x)\in E(X)$;
2. 其 p 次幂绝对值的 Lebesgue 积分存在. 记为 $L^p(E)$ 函数. 所有 $L^p(E)$ 的集合对应 L^p 空间. 当 $p=2$ 时称为平方可积函数, 对应 L^2 空间.

B.1.2 映射——运算规则的拓扑表示

定义 设 A、B 是两个集合, 若 A 中每个元素 a 根据某种运算规则 f 逐个与 B 中元素一一对应, 则这种对应规则 f 称为从 A 到 B 的**映射**.

三种基本映射关系: 函数、泛函、算子.

函数 数值空间 (X) 到数值空间 (Y) 的映射;

泛函 函数形式 $U(x)$ 与数值之间的对应关系, 即函数空间到数值空间的映射, 可写成:

$$u=J\{U(x)\}$$

如简单泛函、多元函数的泛函、含多个函数的泛函、泛函组.

例

1) 所有矢量 $\boldsymbol{f}$ 在一个恒定矢量 $\boldsymbol{C}$ 上的投影

$$\rho=\langle\boldsymbol{C},\boldsymbol{f}\rangle=cf\cos(\boldsymbol{C},\boldsymbol{f})$$

2) 导体的电容量: 电容 C 是面电荷分布函数的函数.

泛函总具有定积分的形式。当 X 为 n 维数组时, 泛函为 n 重积分.

算子 又称变换, 表示函数形式 $\Phi(x)$ 与函数形式 $\Psi(x)$ 之间的对应关系, 即函数空间到函数空间的映射. 写成

$$\Psi(x)=\mathbf{A}\Phi(x)$$

例 静电问题, 如图 B.1 所示. 分离导体间的电容可作为电位函数 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r})$ 或电荷面密度 $\sigma_s(\boldsymbol{r})$ 的泛函:

$$C=\frac{2W_{\mathrm{E}}}{\Phi_0^2}=\frac{\varepsilon\iiint_V|\nabla\Phi(\boldsymbol{r})|^2\,\mathrm{d}v}{\left[\int_a^b\nabla\Phi(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\right]^2}\tag{B.3}$$

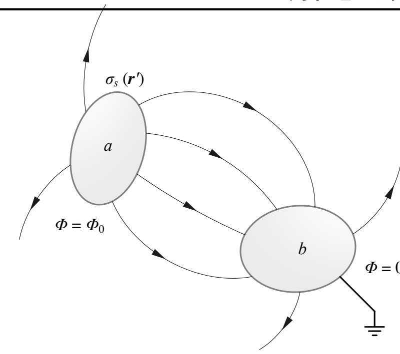

图 B.1 导体间的电容

$$\frac{1}{C}=\frac{2W_{\mathrm{E}}}{Q_0^2}=\frac{\oiint_{S[V]}\oiint_{S'[V]}\sigma_s(\boldsymbol{r})G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}')\sigma_s(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}s'\,\mathrm{d}s}{\left[\iint_{s_a}\sigma_s(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s\right]^2}\tag{B.4}$$

例 (时谐电磁场问题) : Maxwell 方程

$$\begin{cases}\triangledown\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{i}_s(\boldsymbol{r})+\mathrm{j}\omega\,\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\\ \triangledown\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\boldsymbol{i}_s^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})-\mathrm{j}\omega\,\bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}}\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{i}_s(\boldsymbol{r})=-\mathrm{j}\left[\omega\,\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\triangledown\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}\cdot\mathrm{j}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\right]\\ \mathrm{j}\boldsymbol{i}_s^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})=-\mathrm{j}\left[\triangledown\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\omega\,\bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}}\cdot\mathrm{j}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\right]\end{cases}$$

式中 $\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}$ 为单位并矢, $\boldsymbol{i}_s^{\mathrm{m}}$ 为磁流源. 记

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\\ \mathrm{j}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{i}_s(\boldsymbol{r})\\ \mathrm{j}\boldsymbol{i}_s^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})\end{bmatrix}$$

及矩阵形式的算子

$$\mathrm{M}=-\mathrm{j}\begin{bmatrix}\omega\,\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} & \triangledown\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}\\ \triangledown\bar{\bar{\boldsymbol{I}}} & -\omega\,\bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}}\end{bmatrix}$$

则麦氏方程可写成算子方程:

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r})=\mathrm{M}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r})$$

B.1.3 Hilbert 空间

I. 线性空间

$D(E)$ 为定义在 $E(X)$ 上的函数集, 在 $D(E)$ 中任取三个元素 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$, α 和 β 为任意实数, 若下列性质成立, 则 $D(E)$ 的拓扑表示属于线性空间:

1. $(\alpha f+\beta g)\in D$;
2. 加法的分配律、交换律: $f+g=g+f, (f+g)+h=f+(g+h)$.
3. 乘法的分配律、交换律: $\alpha(\beta f)=(\alpha\beta)f, (\alpha+\beta)(f+g)=\alpha f+\beta f+\alpha g+\beta g$;
4. $1\cdot f=f$.

II. 按内积赋范 (线性) 空间

范数 函数 $f(x)$ 的范数 $\|f\|$ 是符合以下性质的 **实数** (g、f 属同一线性空间) :

1. $\|f\|\geqslant 0$, 当且仅当 $f(x)\equiv 0$ 时 $\|f\|=0$;
2. $\|-f\|=\|f\|$;
3. $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$;
4. $\lim\limits_{\alpha_n\to 0}\|\alpha_n f\|=0$, 其中 $\{\alpha_n\}\in K$ 常数域.

但能符合上述性质的运算规则并非唯一, 因此范数可有不同的定义.

内积 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的内积 $\langle f,g\rangle$ 是满足下列运算性质的**复数** (g、f 属同一线性空间):

1. $\langle f,f\rangle\geqslant 0$, 当且仅当 $f(x)\equiv 0$ 时, $\langle f,f\rangle=0$;
2. $\langle f,g\rangle=\langle g,f\rangle^*$, (* 表示复共轭);
3. $\langle f+h,g\rangle=\langle f,g\rangle+\langle h,g\rangle$; ($f,h,g$ 属于同一线性空间)
4. $\langle\alpha f,g\rangle=\alpha\langle f,g\rangle$, α 是常数.

同样内积也可以有不同的定义.

按内积赋范 即定义范数 $\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}$, 此时范数运算规则取决于内积定义.

赋范 (线性) 空间 若线性函数集 $D(E)$ 中的每一元素 $f(x)$ 都有范数, 则 $D(E)$ 的拓扑表示称之为赋范 (线性) 空间.

内积 (线性) 空间 若线性函数集 $D(E)$ 中的每一个元素 $f(x), g(x)$ 都存在内积, 则 $D(E)$ 的拓扑表示称之内积 (线性) 空间.

III. Hilbert 空间

完备空间 设 $D(E)$ 是线性函数集合, 若其中每一个收敛的元素序列 $\{f_n(x)\}$ 都以同一集合中的某元素 $f(x)$ 为极限, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\in D(E)$, 则 $D(E)$ 的拓扑表示称之完备空间.

(Banach) 空间 完备的赋范空间, 简称 $\mathbb{B}$ 空间.

Hilber 空间 完备的内积赋范空间, 简称 $\mathbb{H}$ 空间.

$\mathbb{B}$ 空间包含了按照不同规则赋范的完备空间, 故 $\mathbb{H}$ 空间是其子空间, 表示为 $\mathbb{H}\subset\mathbb{B}$ 或 $\mathbb{B}\supset\mathbb{H}$.

每种按确定内积定义赋范的完备空间都是 $\mathbb{H}$ 空间的子空间, 例如平方可积空间 $L^2(E)$ 、加权平方可积空间 $L^2(E,\sigma(x))$ 及矢量平方可积空间 $\overline{L^2}(E)$. 都是 $\mathbb{H}$ 空间的子空间.

B.2 算子

B.2.1 线性算子

I. 线性算子的定义

设 D_A, D'_A 都是线性函数集, $D_A, D'_A \subset \mathbb{H}$, 由 $\Phi \in D_A, \Psi \in D'_A$, 它们之间的映射关系由 $\Psi = \mathbf{A}\Phi$ 唯一确定, 且满足线性运算规则 (α, β 是任意常数):$\mathbf{A}(\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2) = \alpha\mathbf{A}\Phi_1 + \beta\mathbf{A}\Phi_2$. 相应地, D_A 是 $\mathbf{A}$ 的定义域, D'_A 是 $\mathbf{A}$ 的值域.

线性连续算子 若线性算子 $\mathbf{A}$ 对于任意 $\Phi \in D_A$ 都有 $\lim\limits_{\Phi\to\Phi_1} \mathbf{A}\Phi = \mathbf{A}\Phi_1$, 则 $\mathbf{A}$ 称为线性连续算子.

线性有界算子 若线性算子对于任意 $\Phi \in D_A$ 都有 $\|\mathbf{A}\Phi\| \leqslant C\,\|\Phi\|$, 其中 C 为有限常数, 则称 $\mathbf{A}$ 为线性有界算子.

定理 线性算子的连续性和有界性互为充要条件.

II. 运算性质

设 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 分别是定义在 D_A 和 D_B 上的线性算子, 则满足下列运算性质:

1. 算子的和: 若 $\Phi \in D_A \cap D_B$, 则 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\Phi = \mathbf{A}\Phi + \mathbf{B}\Phi = (\mathbf{B}+\mathbf{A})\Phi$.
2. 算子的积: 若 $\Phi \in D_B$ 而 $(\mathbf{B}\Phi) \in D_A$, 则 $(\mathbf{AB})\Phi = \mathbf{A}(\mathbf{B}\Phi) \neq (\mathbf{BA})\Phi$.
3. 算子的逆: 若 $(\mathbf{AB})\Phi = \Phi$, 则记 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$, 称 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 互为逆算子.

恒等算子 线性算子 $\mathbf{I}$ 对任意函数 Φ 都有 $\mathbf{I}\Phi = \Phi$, 则 $\mathbf{I}$ 为恒等算子. 且

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$$

III. 线性算子方程

设 $\mathbf{A}$ 是已知的线性算子, 若值域中的已知点 $\Psi \in D'_A$ 由定义域中的未知点 $\Phi \in D_A$ 映射而得, 即有确定性算子方程

$$\mathbf{A}\Phi = \Psi \tag{B.5}$$

(B.5) 式的形式解可写为

$$\Phi = \mathbf{I}\Phi = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\Phi = \mathbf{A}^{-1}\Psi$$

因此, 关键是算子的求逆运算.

定理 对于确定性算子方程 (B.5), 若 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在, 则解存在且唯一, 若 $\mathbf{A}^{-1}$ 连续, 即 $\lim\limits_{\Psi\to\Psi_1} \Phi = \Phi_1$, 则解稳定.

对于确定性算子方程,

- 已知 $\mathbf{A}, \Psi$, 求 Φ, → 问题的分析过程
- 已知 Φ, Ψ, 求 $\mathbf{A}$, → 问题的综合/设计过程.

本征值算子方程

$$\mathbf{A}\Phi = \lambda\Phi \tag{B.6}$$

其中 λ 是待定常数, 且仅当 λ 取某些特定的**本征值** $\{\lambda_n | n = 1, 2, \cdots\}$ 时才存在解 Φ_n (本征函数).

B.2.2 对称算子、正定算子和自伴算子

I. 对称算子

含算子的内积: 设 $U(x) \in D'_A \subset L^2(E), V(x) \in D \subset L^2(E)$, 则交集 $D'_A \cap D$ 上的线性泛函

$$\langle \mathbf{A}U, V\rangle = \int_{E(x)} (\mathbf{A}U)V^* \,\mathrm{d}x$$

称为含算子的内积.

对称算子 函数集 $D \subset L^2$ 中任何两个元素 U 和 V 构成的含算子内积都满足

$$\langle \mathbf{A}U, V\rangle = \langle U, \mathbf{A}V\rangle$$

则称 $\mathbf{A}$ 为 D 上的对称算子. 显然, 若 $\mathbf{A}$ 是 D 上的对称算子, $U \in D$, 则由内积性质, 有

$$\langle \mathbf{A}U, U\rangle = \langle U, \mathbf{A}U\rangle^* = \langle U, \mathbf{A}U\rangle$$

说明 $\langle \mathbf{A}U, U\rangle$ 为实数. 这也可视为对称算子的另一种定义.

II. 正定算子

下有界算子 若对于任何 $U \in D \subset L^2$, 都有 $\langle \mathbf{A}U, U\rangle \geqslant a \|U\|^2$, 则称 $\mathbf{A}$ 为 D 上的**下有界算子**. 若 $a = 0$, 则称 $\mathbf{A}$ 为 D 上的**非负算子**.

正算子 若对于任何 $U \in D \subset L^2$, 都有 $\langle \mathbf{A}U, U\rangle > 0$, 则称 $\mathbf{A}$ 为 D 上的**正算子**.

正定算子 若对于任何 $U \in D \subset L^2$, 都有 $\langle \mathbf{A}U, U\rangle > k \|U\|^2, k > 0$, 则称 $\mathbf{A}$ 为 D 上的**正定算子**.

显然有: 正定算子 ⊂ 正算子 ⊂ 非负算子 ⊂ 下有界算子 ⊂ 对称算子.

III. 自伴算子

伴随算子

设 $\mathbf{A}$ 是 $\mathbb{H}$ 空间的线性连续算子, 若存在算子 $\mathbf{B}$ 使任何 $U, V \in \mathbb{H}$ 都有 $\langle \mathbf{A}U, V\rangle = \langle U, \mathbf{B}V\rangle$, 则称 $\mathbf{B}$ 为算子 $\mathbf{A}$ 的**伴随算子**, 记为 $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{B}$. 显然有 $(\mathbf{A}^\dagger)^\dagger = \mathbf{A}$, 因为

$$\langle \mathbf{A}^\dagger U, V\rangle = \langle V, \mathbf{A}^\dagger U\rangle^* = \langle \mathbf{A}V, U\rangle^* = \langle U, \mathbf{A}V\rangle.$$

自伴算子 设是 $\mathbb{H}$ 空间的线性连续算子, 若凡是 $U, V \in \mathbb{H}$ 都有 $\langle \mathbf{A}U, V\rangle = \langle U, \mathbf{A}V\rangle$, 即 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\dagger}$, 则称 $\mathbf{A}$ 为 **自伴算子**, 又称为 Hermite 算子. 显然: 自伴算子都是 $\mathbb{H}$ 上的对称算子.

定理 凡自伴算子都能求逆, 且其逆算子也是自伴算子. 所以确定性自伴算子方程必存在稳定的唯一解. (显然不适于本征值方程)

例 给定

$$\mathbf{A} f(x) = \int f(x) k(x, x')\,\mathrm{d}x'$$

则

$$\langle Af, g\rangle = \int g(x) \int f(x) k(x, x')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x$$

$k(x, x')$ 为核函数, 若核函数对称, 即 $k(x, x') = k(x', x)$, 则 $\langle \mathbf{A} f, g\rangle = \langle f, \mathbf{A}g\rangle$.

所以具有对称核函数的积分算子是自伴算子, 如电磁场问题中空域标量格林函数具有对称性, 因而算子

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\,\mathrm{d}v' \qquad \text{为自伴算子.}$$

IV. Lagrange 意义下的自伴算子

定义在 $D_b \subset \mathbf{H}$ 上的线性连续对称算子称为 Lagrange 意义下的自伴算子. D_b 为满足某边界条件的函数集, 则该边界条件称为**自伴边界条件**. 由自伴算子方程和自伴边界条件构成的定解问题称为**自伴边值问题**.

在电磁场边值问题中, 所求场函数既要满足算子方程、又要满足边界条件, 但相应地方程中的算子并不要求在整个 $\mathbb{H}$ 空间具有自伴性质, 只要在符合边界条件的函数集 D_b 上是线性对称算子, 就足以保证方程解存在而且稳定、唯一.

小结

- 只要我们建立的算子方程具有自伴意义, 解存在、稳定、唯一.
- 是数值分析方法的数学依据
- 帮助我们理解新方法并验证其实用性. 更进一步, 也是我们提出新的方法的数学依据

B.3 自伴边值问题

B.3.1 Sturm-Liouville (S-L) 边值问题

S-L 边值问题 特殊的二阶线性常微分方程, 一阶项的系数是二阶项系数的导数, 如: Bessel 方程, Legendre 方程, Mathieu 方程等. 形如

$$\begin{cases} \left\{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]-q(x)\right\}U(x)+f(x)=0, \quad x\in[x_1,x_2] \\ \text{B.C.} \quad \begin{aligned} &\left[\alpha_1\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\beta_1\right]U(x_1)=0 \\ &\left[\alpha_2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\beta_2\right]U(x_2)=0 \end{aligned} \end{cases}$$

显然, 一阶项的系数是二阶项系数的导数, $p(x), q(x), p'(x)$ 连续, 实常数 $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$ 都不同时为零.

当 $f(x)$ 为已知函数时称为**确定性边值问题**, $f(x)=\lambda r(x)U(x)$ (r(x) 为已知函数, λ 为待定常数) 时称为**广义本征值边值问题**;当 $r(x)\equiv 1$ 即 $f(x)=\lambda U(x)$ 时即为 (一般) 本征值边值问题.

当 $\alpha_1=\alpha_2=0$ 时为第一类边界条件;

当 $\beta_1=\beta_2=0$ 时为第二类边界条件;

当 $\alpha_1\beta_1\neq 0$ 或 $\alpha_2\beta_2\neq 0$ 时为第三类边界条件.

记微分算子 $\mathbf{A}=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)$ 定义在符合所给边界条件函数集 $D_b\subset\mathbb{H}$ 上, 则 S-L 方

程可写为:

$$\mathbf{A}U(x)=f(x) \tag{B.7}$$

对以上三类边界条件, 都有

$$\left[U\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}-V\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right]_{x_1}^{x_2}=0, \quad U,V\in D_b$$

算子 $\mathbf{A}$ 的性质:

1. 线性连续算子;

2. 注意到 **A** 是实算子, 利用分部积分可得

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{A}U, V\rangle - \langle U, \mathbf{A}V\rangle \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left(V^*\mathbf{A}U - U\mathbf{A}V^*\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left[U\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P\frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}x}\right) - V^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right)\right] \mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left\{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(Up\frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}x}\right) - p\frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right] - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(V^*p\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right) - p\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}x}\right]\right\} \mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(Up\frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}x} - V^*p\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{d}x = p\left[U\frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}x} - V^*\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right]_{x_1}^{x_2} = 0
\end{aligned}
$$

所以 **A** 是 D_b 上的对称算子, 从而就是 (Lagrange) 自伴算子;所以 S-L 边值问题就是 (Lagrange 意义下) 自伴边值问题.

3. 特定条件下为正定算子.

B.3.2 Poisson 边值问题

静电场问题的基本方程是描述电位与电荷之间关系的 Poisson 方程 (Poisson 边值问题, 二阶椭圆型偏微分方程):

$$
\begin{cases}
\nabla\nabla U(\boldsymbol{r}) = -f(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r} \in V,\ U(\boldsymbol{r}),\ f(\boldsymbol{r}) \in \mathbb{R} \\
\alpha\dfrac{\partial U(\boldsymbol{r}_b)}{\partial n} + \beta U(\boldsymbol{r}_b) = 0, & \boldsymbol{r}_b \in S[V],\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha\beta \neq 0
\end{cases}
$$

记 $\mathbf{A} = -\nabla^2 = -\nabla\nabla$ 定义在符合上述边界条件的函数集 $D_b \subset \mathbb{H}$ 上, 则 Poisson 方程可写成确定性算子方程:

$$
\mathbf{A}U(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}) \tag{B.8}
$$

设 $U, V \in D_b$, 则

1st B.C.: $\alpha = 0, U(\boldsymbol{r}_b) = V(\boldsymbol{r}_b) = 0$;

2nd B.C. : $\beta = 0, \dfrac{\partial U(\boldsymbol{r}_b)}{\partial n} = \dfrac{\partial V(\boldsymbol{r}_b)}{\partial n} = 0$;

3rd B.C. : $\alpha\beta \neq 0, \dfrac{\partial U(\boldsymbol{r}_b)}{\partial n} \cdot \dfrac{1}{U(\boldsymbol{r}_b)} = \dfrac{\partial V(\boldsymbol{r}_b)}{\partial n} \cdot \dfrac{1}{V(\boldsymbol{r}_b)} = -\dfrac{\beta}{\alpha}$.

即对三类边界条件, 都有 $\left[U\dfrac{\partial V}{\partial n} - V\dfrac{\partial U}{\partial n}\right]_{\boldsymbol{r}\in S[V]} = 0$

A 的性质:

1. 线性连续;

2. 由第二格林定理

$$\langle \mathbf{A}U, V\rangle - \langle U, \mathbf{A}V\rangle = \iiint_V (U\nabla\nabla V - V\nabla\nabla U)\,\mathrm{d}V = \oiint_{S[V]} \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)\mathrm{d}S = 0$$

故 $\mathbf{A}$ 是 D_b 上的对称算子, 从而也是 (Lagrange 意义) 自伴算子, Poisson 边值问题属于自伴边值问题.

3. 由第一格林定理

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A}U, U\rangle &= -\iiint_V (U\nabla\nabla U)\,\mathrm{d}V \\ &= \iiint_V \nabla U\cdot\nabla U\,\mathrm{d}V - \oiint_{S[V]} U\frac{\partial U}{\partial n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V |\nabla U|^2\,\mathrm{d}V + \begin{cases}0, & \text{1st, 2nd B.C.}\\ \dfrac{\beta}{\alpha}\oiint_{S[V]} |U|^2\,\mathrm{d}S, & \text{3rd B.C.}\end{cases}\end{aligned}$$

所以当 $\alpha\beta \geqslant 0$ 时 $\mathbf{A}$ 是正算子, 且是正定算子.

B.3.3 Helmholtz 边值问题

I. 标量场

时谐电磁场边值问题分为确定性和本征值问题两类. **确定性问题** (源区非齐次 Helmholtz 方程)

$$\begin{cases}(\nabla\nabla + k^2)U(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r}\in V, k^2 = \omega^2\mu\varepsilon\\ \alpha\dfrac{\partial U(\boldsymbol{r}_b)}{\partial n} + \beta U(\boldsymbol{r}_b) = 0, & \boldsymbol{r}_b\in S[V], \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \alpha\beta\neq 0\end{cases}$$

因为描述写时谐场, 这里 $U(\boldsymbol{r})$, $f(\boldsymbol{r})$ 可以是复函数. 令算子 $\mathbf{A} = -(\nabla\nabla + k^2)$, 它也是 D_b 上的线性连续对称算子, 且 $k^2 > 0$ 时是下有界算子 $\subset$ 对称算子, 故上述边值问题属于自伴边值问题.

本征值问题 (非源区齐次 Helmholtz 方程)

$$\begin{cases}(\nabla\nabla + k^2)U(\boldsymbol{r}) = 0, & \boldsymbol{r}\in V, k^2 \text{ 为待定常数}\\ \alpha\dfrac{\partial U(\boldsymbol{r}_b)}{\partial n} + \beta U(\boldsymbol{r}_b) = 0, & \boldsymbol{r}_b\in S[V], \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \alpha\beta\neq 0\end{cases}$$

记 $\lambda = k^2, \mathbf{A} = -\nabla\nabla$, 则方程为 $\mathbf{A}U(\boldsymbol{r}) = \lambda U(\boldsymbol{r})$, 也是属于自伴边值问题.

II. 矢量场

矢量场函数本征值问题

$$\begin{cases}\mathbf{A}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r}) = \lambda\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r}), & \mathbf{A} = \nabla\nabla,\ \lambda = k^2 \text{ 为待定常数}\\ \alpha\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times\nabla\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r}_b)\right] + \mathrm{j}\beta\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r}_b)\right] = 0, & \boldsymbol{r}_b\in S[V], \alpha\beta\neq 0\end{cases}$$

对于理想导体, $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r})$ 表示电场时为 1st B.C.($\alpha 0$), 表示磁场时为 2nd B.C. ($\beta = 0$) .

对于电抗性边界, 电抗为切向电场与切向磁场之比, 为 3rd B.C. ($\alpha\beta \neq 0$).

$\mathbf{A}$ 也是 $D_b \subset \mathbb{H}$ 上 (Lagrange 意义下) 的自伴算子, 故上述边值问题也属自伴本征值边值问题. 对任何 α、β, $\mathbf{A}$ 一定是正 (定) 算子, 其证明用到矢量形式格林定理.

B.3.4 Fredholm 边值问题

求电磁源的分布需求解 Fredholm 积分方程. 也分确定性、本征值问题.

I. 确定性问题 (第一类 Fredholm 积分方程)

$$\begin{cases} \iiint_V G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}')U(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V' = f(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r}' \in V \\ G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}') = \sum\limits_m g_m(\boldsymbol{r})g_m^*(\boldsymbol{r}') = G^*(\boldsymbol{r}'|\boldsymbol{r}) \end{cases} \tag{B.9}$$

其中 $G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}')$ 为该问题的 Green 函数, 各类边条的约束已作用于确定 Green 函数的过程, 即 $G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}') \in D_b$. $U(\boldsymbol{r})$ 是未知的电荷 (静电场问题) 或电流 (时谐场) 源函数. 已知函数 $f(\boldsymbol{r})$ 是指定边界上的电位或电场函数.

上述第一类 Fredholm 积分方程可写成确定性算子方程: $\mathbf{A}U(\boldsymbol{r}') = f(\boldsymbol{r})$, 算子 $\mathbf{A} = \iiint_V G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V'$ 也归属于 (Lagrange 意义下) 自伴算子 ($\mathbf{A}$ 的值域满足 $f(\boldsymbol{r})$ 的约束边界条件), (B.9) 也是自伴边值问题. $\mathbf{A}$ 也一定是正 (定) 算子.

注意 由于 $G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}')$ 是复函数

$$\langle \mathbf{A}U, V\rangle - \langle U, \mathbf{A}V\rangle = \iiint_V [V^*(\mathbf{A}U) - U(\mathbf{A}V)^*]\,\mathrm{d}V,$$

电磁场边界条件针对 $f(\boldsymbol{r})$, 而不是 $U(\boldsymbol{r})$, 故此时算子是定义在值域的.

II. 标量场本征值问题

第二类 Fredholm 积分方程构成本征值问题:

$$\begin{cases} \iiint_V G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}')U(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V' = \lambda U(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r}' \in V, \lambda \text{ 是待定常数} \\ G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}') = \sum\limits_m g_m(\boldsymbol{r})g_m^*(\boldsymbol{r}') = G^*(\boldsymbol{r}'|\boldsymbol{r}) \end{cases} \tag{B.10}$$

也可改写成本征值算子方程 $\mathbf{A}U(\boldsymbol{r}) = \lambda U(\boldsymbol{r})$. 由于未知函数也出现于积分号外, 要受边界条件 $U(\boldsymbol{r}) \in D_b$ 约束, 故 $\mathbf{A} = \iiint_V G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V'$ 是 $D_b \subset \mathbb{H}$ 上的 Lagrange 意义下的自伴算子, 且是正 (定) 算子, (B.10) 是自伴边值问题.

III. 矢量场本征值问题

$$
\begin{cases}
\iiint_V \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V' = \lambda\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r}'\in V, \quad \lambda\text{ 是待定常数} \\
\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}') = \sum_m \boldsymbol{g}_m(\boldsymbol{r})\boldsymbol{g}_m^*(\boldsymbol{r}') = \overset{*}{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}}(\boldsymbol{r}'|\boldsymbol{r})
\end{cases}
\tag{B.11}
$$

式中积分核 $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}')$ 是并矢 Green 函数. 记 $D_b\subset\mathbb{H}$ 上的线性连续算子 $\mathbf{A}=\iiint_V\left[\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}')\cdot\right]\mathrm{d}V'$, 则 B.11 为: $\mathbf{A}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r})=\lambda\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r})$.

以上在 Poisson、Helmholtz、Fredholm 问题中定义的三维偏微分算子或积分算子, 对各种二维的偏微分或积分算子仍同样适用, 即能确保自伴性质和正 (定) 性质, 可用统一的观点讨论其求解方法.