

## 第 10 章 几何绕射理论

几何绕射理论 (Geometrical Theory of Diffraction, GTD) 是几何光学的推广. 几何绕射理论是以尖劈这个典型绕射问题的精确解为基础的, 绕射场通过绕射系数和入射场线性相关, 它对多种散射问题可给出相当好的回答. 由于几何绕射理论沿用了几何光学中射线的概念, 其物理图象清晰, 计算相对简单. 在阴影边界和反射边界, 几何光学的绕射系数结合过渡函数能消除奇异性, 这通常也叫做一致绕射理论. GTD 能为一些无法求得严格解的问题提供有效的高频近似解. 例如, 飞机、导弹和舰艇上天线这一类复杂辐射系统可以用由一些简单几何形状构成的数学模型来模拟, 然后用 GTD 求得其电磁场.

### 10.1 基本概念

#### 10.1.1 高频的几何光学近似

几何光学法 (Geometrical Optics, GO) 是一种射线追踪方法, 波长被认为是无限小, 能量沿着细长管 (射线管) 传播. 在高频, 波长很短时, 若

1. 波长远小于所讨论物体的几何尺寸,
2. 媒质的空间变化相对与波长而言是慢变化,

则可假设局部区域的电磁波的性质与在均匀媒质相同, 即局部可把 EM 波的波阵面看作与平面波的波阵面一样. 即

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-jk_0\varphi} \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-jk_0\varphi} \end{cases} \quad (10.1)$$

其中  $k_0$  是自由空间中波数.  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  称为程函或波程函数, 是实函数. 此时无源区域的 Maxwell 方程为:

$$\begin{cases} \nabla\varphi \times \mathbf{H}_0 + c\varepsilon\mathbf{E}_0 = \frac{1}{jk_0} (\nabla\mathbf{H}_0) \\ \nabla\varphi \times \mathbf{E}_0 - c\mu\mathbf{H}_0 = \frac{1}{jk_0} (\nabla\mathbf{E}_0) \\ \mathbf{E}_0 \cdot \nabla\varphi = \frac{1}{jk_0} \left( \frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_0 + \nabla\mathbf{E}_0 \right) \\ \mathbf{H}_0 \cdot \nabla\varphi = \frac{1}{jk_0} \left( \frac{\nabla\mu}{\mu} \cdot \mathbf{H}_0 + \nabla\mathbf{H}_0 \right) \end{cases} \quad (10.2)$$

几何光学近似为  $\lambda_0 \rightarrow 0, k_0 \rightarrow \infty$ , 再由慢变化假设  $\nabla\mathbf{E}_0, \nabla\mathbf{H}_0, \nabla\mathbf{E}_0, \nabla\mathbf{H}_0$  均为有限值, 媒质变化慢说明  $\varepsilon, \mu$  在一个波长内变化很小, 即

$$\frac{1}{\varepsilon} |\nabla\varepsilon| \lambda_0 \ll 1, \quad \frac{1}{\mu} |\nabla\mu| \lambda_0 \ll 1 \quad (10.3)$$

故上述 (10.2) 中四式右边均为零, 所以几何光学近似下的场方程为:

$$\begin{cases} \nabla\varphi \times \mathbf{H}_0 + c\varepsilon\mathbf{E}_0 = 0 \\ \nabla\varphi \times \mathbf{E}_0 - c\mu\mathbf{H}_0 = 0 \\ \mathbf{E}_0 \cdot \nabla\varphi = 0 \\ \mathbf{H}_0 \cdot \nabla\varphi = 0 \end{cases} \quad (10.4)$$

其中  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  为自由空间中的光速. 对于非铁磁媒质 ( $\mu = \mu_0$ ), 则上式中前二式可化为:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_0 = z_0\mathbf{H}_0 \times \frac{\nabla\varphi}{n} \\ z_0\mathbf{H}_0 = \frac{\nabla\varphi}{n} \times \mathbf{E}_0 \end{cases} \quad (10.5)$$

其中  $n = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0} = c/v$  是媒质的折射率 (refraction index),  $z_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon}$  是媒质的特性阻抗. 可见,  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{H}_0$  和  $\nabla\varphi$  是互相正交的矢量, 即几何光学场在局部是一平面波.

式 (10.4) 中第二式代入第一式可得:

$$\nabla\varphi \times (\nabla\varphi \times \mathbf{E}_0) + n^2\mathbf{E}_0 = 0 \quad (10.6)$$

注意到

$$\nabla\varphi \times (\nabla\varphi \times \mathbf{E}_0) = (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla\varphi) \nabla\varphi - (\nabla\varphi)^2 \mathbf{E}_0$$

则式 (10.6) 化为

$$\left[ n^2 - (\nabla\varphi)^2 \right] \mathbf{E}_0 = 0$$

欲使  $\mathbf{E}_0$  有非零解, 则

$$(\nabla\varphi)^2 = n^2$$

或

$$\left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 = n^2(x, y, z) \quad (10.7)$$

(10.7) 式称为程函方程 (the wave route function's equation). 程函  $\varphi$  包含了媒质电参数的变化, 是确定等相位面的特征函数. 程函方程是几何光学的一个基础方程.

### 10.1.2 几何光学的强度定律

平均坡印亭矢量

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{s} \rangle &= \frac{1}{2} \Re (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*) \\ &= \frac{1}{2} \Re \left[ \mathbf{E}_0 \times \left( \frac{1}{c\mu} \nabla \varphi \times \mathbf{E}_0 \right)^* \right] \\ &= \frac{1}{2c\mu} \Re (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) \nabla \varphi \\ &= \frac{2}{c\mu\varepsilon} \langle w_e \rangle \nabla \varphi = \frac{c}{n^2} \langle w \rangle \nabla \varphi\end{aligned}$$

其中, 平均电能密度  $\langle w_e \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*)$ , 平均能量密度  $\langle w \rangle = 2 \langle w_e \rangle$ .

令  $\hat{\mathbf{i}}$  为  $\nabla \varphi$  的单位矢量, 即

$$\hat{\mathbf{i}} = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} = \frac{\nabla \varphi}{n}$$

则

$$\langle \mathbf{s} \rangle = \frac{c}{n} \langle w \rangle \hat{\mathbf{i}} = v \langle w \rangle \hat{\mathbf{i}}$$

上式说明, 场沿射线运动, 射线方向即为垂直波前的方向. 能量以速度  $v = c/n$  沿射线方向流动,  $\hat{\mathbf{i}}$  与等相位面垂直.

综合以上各点, 在几何光学条件下, 电磁能量, 波速与能流之间的关系都与均匀媒质中的平面波 (TEM) 相似, 能量传播的速度为  $v$ . 结合前面的结论, 可以认为, 在几何光学条件下, 各点的电磁波在局部是平面

电磁波.

由能量守恒定律, 在非导电媒质及无外界功率的区域:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{s} = 0$$

对于时谐场, 前面项时间平均后为零, 即

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{s} \rangle = 0$$

考虑一个射线管 (ray tube), 如图 10.1 所示. 上式说明, 射线管内能量是守恒的, 即穿过射线管任一横截面的能量是常数, 即

$$\langle \mathbf{s}_1 \rangle \cdot d\mathbf{A}_1 = \langle \mathbf{s}_2 \rangle \cdot d\mathbf{A}_2 \quad (10.8)$$

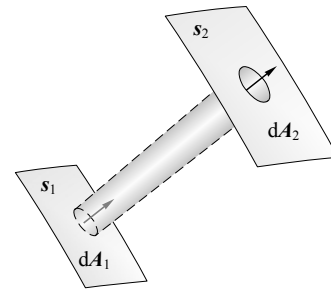


图 10.1 射线管

(10.8) 式称为几何光学的强度定律 (the strength law of GO).

### 10.1.3 均匀媒质中射线场的基本表达式

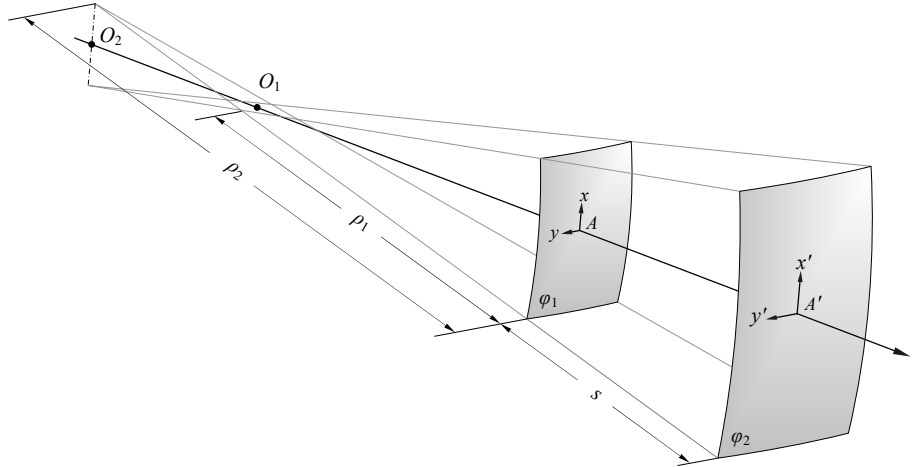


图 10.2 射线管的几何关系

如果媒质是均匀的, 则射线是直线. 由强度定律可求得传播路径上场强振幅的相对关系. 如图 10.2, 在波面  $\varphi_1$  上,  $A$  点的两个主曲率半径分别为  $\rho_1$  和  $\rho_2$ , 也称为**射线焦散距离** (caustics).  $x$  和  $y$  分别是两个主方向. 由于这些射线同时与波面  $\varphi_2$  正交, 故在  $\varphi_2$  上,  $A'$  点主曲率半径分别为  $\rho_1 + s$  和  $\rho_2 + s$ . 设  $A$  点的平面元为  $dA$ , 对应的  $A'$  点的面元为  $dA'$ , 这两个面元的关系为:

$$x' = \left| \frac{\rho_1 + s}{\rho_1} \right| x, \quad y' = \left| \frac{\rho_2 + s}{\rho_2} \right| y, \quad dA' = \left| \frac{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}{\rho_1 \rho_2} \right| dA$$

由强度定律, 可得

$$|E_2| = |E_1| \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}} \quad (10.9)$$

其中,

$$\begin{cases} \rho_1 = \rho_2 < \infty, & \text{球面波,} & |E_2| = |E_1| \frac{\rho}{\rho + s} \\ \rho_1 < \infty, \rho_2 \rightarrow \infty, & \text{柱面波,} & |E_2| = |E_1| \frac{\rho_1}{\rho_1 + s} \\ \rho_1, \rho_2 \rightarrow \infty, & \text{平面波,} & |E_2| = |E_1| \\ \rho_1 \neq \rho_2 < \infty, & \text{象散波,} & E_2 = E_1 \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}} e^{-jks} \end{cases}$$

1. 上式可用来由  $\varphi$  内一点的场强求另一点的场强, 精度较高, 但只在 GO 假定下成立.
2.  $s = -\rho_1$  或  $-\rho_2$  时, 上式不能用, 称为**散焦区**, 几何绕射理论在散焦区无效.
3. 由 Keller 的假设, 绕射线上的场也适用此式.

### 10.1.4 Fermat 原理

光程: 沿曲线  $C$  从  $P_0$  到  $P$  点之间的积分

$$\int n ds$$

其中  $n(x, y, z)$  是媒质的折射率. 光程一般与所选的路程  $C$  有关.

如  $C$  是一条射线, 则  $n = |\nabla\varphi|$ , 所以

$$\int_C n ds = \varphi(P) - \varphi(P_0)$$

在两个波面之间沿任何一条射线的光程都是相等的.

**费马原理:**  $P_0$  与  $P$  两点间射线的实际轨迹就是使光程  $\int_C n ds$  取极值的曲线, 而极值一般为极小值, 但有时也有可能取极大值.

在均匀媒质中, 光程与几何路径成正比, 而两点间最短路程是直线, 故此时光程必定由直线组成. 即在均匀媒质中电磁波沿直线传播.

由费马原理可以很简单地证明两种媒质分界面上的发射定律和折射定律.

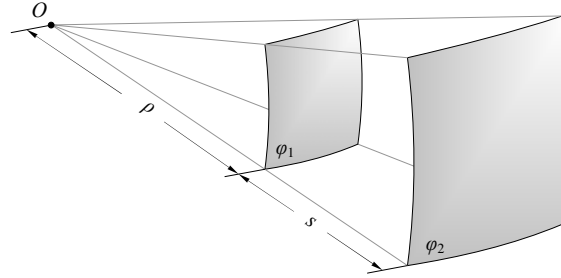


图 10.3 球面波射线管

### 10.1.5 几何绕射理论的基本概念

几何光学只研究直射、反射和折射问题, 不能解释绕射和散射现象. 当几何光学射线遇到物体的不连续性, 如边缘, 尖顶和其它不连续性时, 将产生它所不能进入的阴影区, 按几何光学理论, 阴影区的场应等于零, 但实际上阴影区的场并不等于零, 这是由绕射现象造成的, 而 GO 却不能解释.

几何绕射理论 (GTD) 是 1957 年由 J.B. Keller 提出的一种近似计算高频电磁场的新方法. 它克服了几何光学产生的阴影区, 它的基本概念为:

1. 绕射场是沿绕射线传播的, 这种射线的轨迹可以用广义费马原理确定. 广义费马原理就是把费马原理推广到包含物体边缘上的点.
2. 局部性原理: 绕射只决定于散射体上绕射点邻域内的特性和几何特性, 也就是说绕射场只由绕射点的入射场与散射表面的局部性质决定.
3. 离开绕射点后的绕射线仍遵循几何光学定律, 即绕射线管内能量守恒, 设路程的相位延迟等于媒质的波数和距离的乘积.

在边界面上入射的几何光学不连续的那些点, 就是产生绕射的点, 对于确定的源点和场点, 绕射点可由广义费马原理确定, 即源点到绕射点到场点的光程取极值. 下面就三种不同的典型情况讨论在均匀媒质中的绕射原理及绕射线.

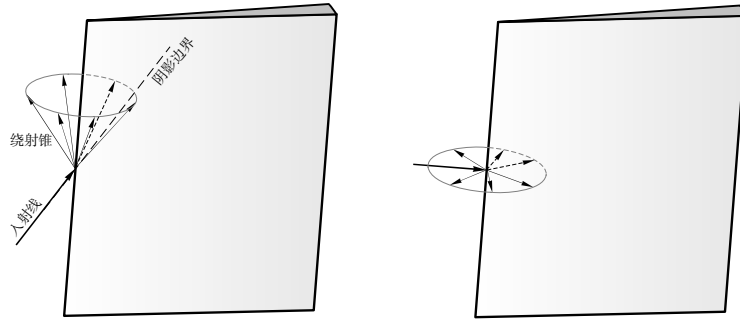


图 10.4 边缘绕射场

### I. 边缘绕射场

边缘绕射线与边缘的夹角等于相应的入射线与边缘的夹角. 入射线与绕射线分别在绕射点与边缘垂直的平面的两侧或同在该平面上. 一条入射线激起无数条绕射线, 它们都位于一个以绕射点为顶点的圆锥面上. 圆锥轴就绕射点边缘的切线, 圆锥的半顶角等于入射线与边缘切线的夹角. 当入射线与边缘垂直时, 圆锥面就退化为与边缘垂直的平面圆盘, 如图 10.4 所示.

### II. 尖顶绕射线

尖顶可以是圆锥的顶点, 也可以是  $90^\circ$  拐角的顶点. 一根入射线可以激起无穷多根尖顶绕射射线, 由尖顶发出的绕射线可以是任意方向的, 它们将以尖顶为中心沿径向向四面八方发出. 所以相应的绕射波阵面是以尖顶为中心的球面. 可见尖顶绕射场的幅度必定和距离的两次方成反比. 所以尖顶绕射场比边缘绕射场衰减得更快. 如图 10.5 所示.

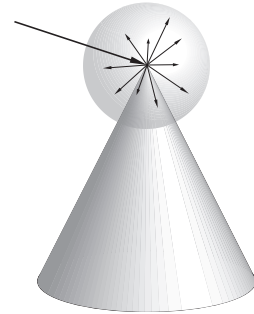


图 10.5 圆锥尖顶绕射

至今尚未求得尖顶绕射场的绕射系数, 但大多数情况下它可忽略不计.

### III. 表面绕射射线

当有射线向光滑的理想导电曲面入射时, 即沿其阴影边界入射时, 它将分为两部分: 一部分入射能量将按几何光学定律继续照直前进, 另一部分入射能量则沿物体的表面传播, 成为表面射线. 表面射线在传播时将不断沿切向发出绕射线. 如图 10.6 所示. 对于阴影区域的场点  $P$ , 入射线与绕射线分别和表面上  $Q_1$  和  $Q_2$  点相切, 与边缘绕射线和尖顶绕射线不同的是, 在曲面上一定区域内, 两点之间只要一条曲线能使两点间的光程最小.

表面射线又称爬行波, 理论上说它要环绕封闭曲面爬行无穷多次, 实际上它的能量衰减很快, 因此环绕封闭曲面一周以上即可不必考虑.

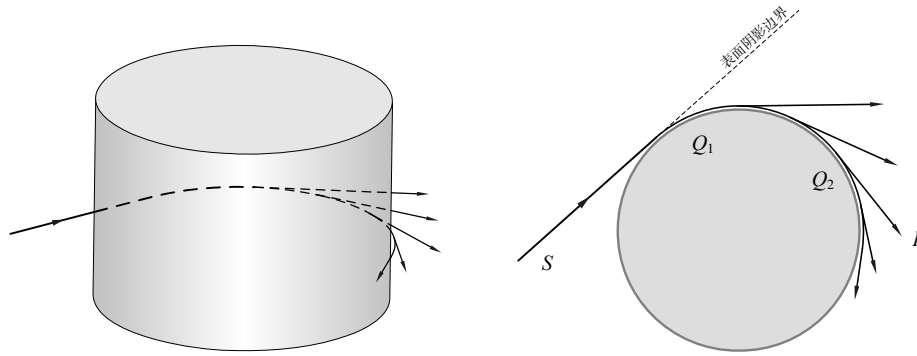


图 10.6 表面绕射射线

#### IV. 绕射射线上场的基本表达式

若给定射线上某点的场强  $E_0$ , 则射线上任意一点  $P$  (除散焦线上的点以外) 的场强可表达为:

$$E(P) = E_0 A(s) e^{-jks}, \quad A(s) = \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}}$$

$A$  称为扩散因子, 它表示由于传播时能量扩散而产生的场强幅度的衰减.

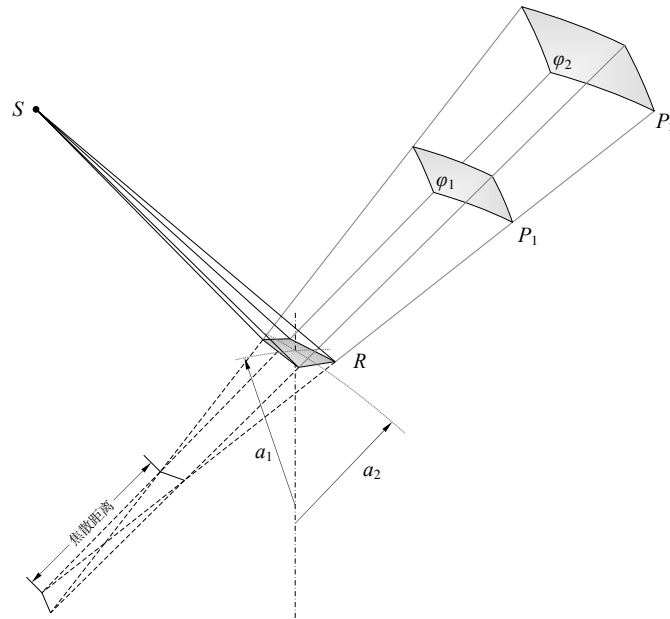


图 10.7 曲面的几何光学反射

如果射线在传播时遇到了反射物体, 则反射场与入射场一起构成几何光学场, 如图 10.7 所示 [28]. 其中  $P$  是点源,  $a_1$  和  $a_2$  分别是反射面的两个主曲率半径. 在  $R$  点的反射场与入射场的关

系可以用下式表示

$$\mathbf{E}^r(P) = \mathbf{E}^i(R) \bar{\mathbf{R}} \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s_1^r)(\rho_2^r + s_2^r)}} e^{-jk s^r} \quad (10.10)$$

其中  $\sqrt{\dots}$  为扩散因子,  $\rho_1^r$  和  $\rho_2^r$  为反射场波面的主曲率半径,  $e^{-jk s^r}$  为  $R$  到  $P$  的相位延迟,  $s^r$  为  $R$  到  $P$  的几何距离.

类似地, 绕射场可以按上述方式表达, 设一条边缘绕射线从源点  $S$  经绕射点  $Q$  到达场点  $P$ , 则  $Q$  点的绕射过程可用下式表达:

$$\mathbf{F}^d(Q) = \mathbf{E}^i(Q) \cdot \bar{\mathbf{D}} \quad (10.11)$$

其中,  $\mathbf{E}^i(Q)$  为  $Q$  点的入射场,  $\mathbf{F}^d(Q)$  为  $Q$  点的激励系数,  $\bar{\mathbf{D}}$  为并矢绕射系数, 一般为  $3 \times 3$  矩阵, 经变换可为  $2 \times 2$  矩阵. 绕射线离开绕射点  $Q$  后仍服从几何光学定律, 故  $P$  点的绕射场表示为:

$$\mathbf{E}^d(P) = \mathbf{F}^d(Q) A_d(s^d) e^{-jk s^d} = \mathbf{E}^i(Q) \bar{\mathbf{D}} \sqrt{\frac{\rho_1^d \rho_2^d}{(\rho_1^d + s_1^d)(\rho_2^d + s_2^d)}} e^{-jk s^d}$$

其中  $s^d$  为绕射线从  $Q$  到  $P$  的几何距离,  $\rho_1^d, \rho_2^d$  为绕射场波阵面的两个主曲率半径.

已知入射场及边缘的几何形状、物理特性, 绕射点  $Q$  可由广义费马原理确定, 求绕射场的问题可归结为求  $Q$  点的并矢绕射系数  $\bar{\mathbf{D}}$  的问题.

## V. 关于 GTD 的应用

辐射与散射问题的高频近似解就是直射、反射和绕射场的总贡献, 求解各种射线的场可分为二步:

### 1. 射线求迹

首先求出对给定场点的场有贡献的所有射线的轨迹, 为此需用广义费马原理确定反射点和绕射点, 并求出能使从源点经反射点或绕射点到场点的光程取极值的路程. 这是一个纯几何问题.

### 2. 求并矢绕射系数

假设射线求迹问题已经解决, 则下一步就是场的计算问题. 当物体的电尺寸比波长大得多时, 根据局部原理总可以把物体分解为若干典型的几何构形. 分别求出这些典型的几何构形的反射场和绕射场并把它们叠加起来就得总场, 典型几何构形的绕射系数一般是通过把渐近计算结果与典型几何构形绕射场的严格解对比而求得的.

GTD 的优缺点:

- + 计算方法简单明确, 易于应用
- + 只要散射体的电尺寸远大于波长, GTD 的计算结果是很精确的



- + 它为辐射和散射的理论机制提供了明确的物理概念
- + 它可以用来求解还没有严格解的一些复杂的辐射和散射问题
- + 它易于和象矩量法之类的数值分析方法结合起来解决一些复杂问题
- 有用的典型解太少, 因而它的应用范围受到限制
- 它不能用来计算散焦区的场
- 当物体的几何形状复杂时, 射线的数量很多, 此时不仅需计算一次绕射, 还要计算多次绕射, 此时不仅射线轨迹的确定和绕射场的计算很困难, 而且计算量也很大

但不管如何, GTD 工程意义很大, 在某些领域是无可替代的.

## 10.2 理想导电劈

几何绕射理论求解问题的基本思路就是先研究一些基本几何构形 (又称典型问题) 的解, 再应用局部性原理将这些解推广, 近似得到一些实际问题的解. 所以 GTD 的应用范围取决于已知解的典型问题的多少. 本节所讨论的理想导电劈就是边缘绕射场的一个典型问题.

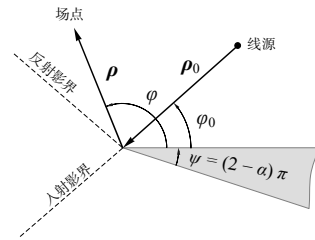


图 10.8 理想导电劈

考虑一个二维理想导电劈, 内角为  $(2 - n)\pi$ , 在如图 10.8 所示圆柱坐标中, 先考虑单位强度的线源照射劈时的散射场, 再得线源退至无穷远处, 即得单位强度平面波照射导电劈时的散射场.

### 10.2.1 理想导电劈的本征函数解

入射场总可以分解为电极化和磁极化两部分, 总的散射场就是它们分别产生的场的叠加. 一种是电极化波, 入射电场垂直于入射面 (平行于劈边缘), 对应于线电流源照射的情况; 令一种是磁极化波: 入射磁场垂直于入射面, 对应于线磁流源照射的情况, 分别讨论.

当入射场为电极化波:

$$\nabla \nabla E_z + k^2 E_z = j\omega\mu \delta(\rho - \rho_0)$$

( $\nabla \nabla A_z + k^2 A_z = -\delta(\rho - \rho_0)$ , 在辐射区  $E_z = -j\omega\mu A_z$ , 二维问题中  $\nabla \varphi$  不包含  $z$  分量).

源点坐标  $\rho_0(\rho_0, \varphi_0)$ ; 场点坐标  $\rho(\rho, \varphi)$ , 在柱坐标下, 上式展开为:

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \right] E_z = j\omega\mu \frac{\delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0)}{\rho}$$

同时场点应满足下列条件:

1. 辐射条件  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left( \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + jk E_z \right) = 0$ .
2. 近区条件  $\rho \rightarrow 0$  时场为有限值, 在源点 ( $\rho = \rho_0$ ) 时场连续
3. 导体边界条件  $\varphi = 0, \varphi = 2\pi - n$  面上, 对电极化波  $E_z|_s = 0$ , 对磁极化波  $\left. \frac{\partial H_z}{\partial n} \right|_s = 0$ .

4. 边缘条件: 对于有边缘的导体的电磁散射问题而言满足上述条件的解还不是唯一的, 还必须规定在尖锐边缘附近场的性态, 即: 在边缘附近所储存的能量是有限的. 对于二维导电劈, 这一条件意味着:

$$\rho \rightarrow 0 \quad \begin{cases} E_z, H_z = O(\rho^{\xi+1}) \\ H_\rho, H_\varphi, E_\rho, E_\varphi = O(\rho^\xi) \end{cases} \quad \text{其中, } \xi = \frac{\pi}{2\pi - \psi_0} - 1$$

上述问题的解为

$$E_z = \begin{cases} -\frac{kZ_0}{2n} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_\nu J_\nu(k\rho) H_\nu^{(2)}(k\rho_0) \sin(\nu\varphi) \sin(\nu\varphi_0) & \rho < \rho_0 \\ -\frac{kZ_0}{2n} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_\nu J_\nu(k\rho_0) H_\nu^{(2)}(k\rho) \sin(\nu\varphi) \sin(\nu\varphi_0) & \rho > \rho_0 \end{cases}$$

其中,  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$  为媒质的波阻抗,  $\varepsilon_\nu = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 2 & m > 0 \end{cases}$  称为诺伊曼数 (Neumann Number).

$$\nu = \frac{m}{n}.$$

同样地对于磁极化波入射时, 本征函数解为

$$H_z = \begin{cases} -\frac{k}{2nZ_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_\nu J_\nu(k\rho) H_\nu^{(2)}(k\rho_0) \cos(\nu\varphi) \cos(\nu\varphi_0) & \rho < \rho_0 \\ -\frac{k}{2nZ_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_\nu J_\nu(k\rho_0) H_\nu^{(2)}(k\rho) \cos(\nu\varphi) \cos(\nu\varphi_0) & \rho > \rho_0 \end{cases}$$

可以看出场与源是互易的.

要求单位强度平面波入射时导电劈的散射场时, 可得上述解中  $\rho_0 \rightarrow \infty$ , 并关于单位强度产生的辐射场进行归一化, 可得平面波入射时导电劈的本征函数解.

已知  $(\rho', \varphi')$  处的二维单位源在  $(\rho_0, \varphi_0)$  处的辐射场为:

$$E_z = -\frac{kZ_0}{4} H_0^{(2)}(k|\rho_0 - \rho|) \quad (10.12)$$

将线源退至无穷远处, 即  $\rho_0 \rightarrow \infty$ , 则上述解中  $\rho > \rho_0$  部分失效, 且由 Hankel 函数的大宗量近似

$$\rho_0 \rightarrow \infty: \quad H_0^{(2)}(k\rho_0) \approx \sqrt{\frac{2j}{\pi k\rho_0}} j^\nu e^{-jk\rho_0} \quad (10.13)$$

则二维单位源

$$E_z = -\frac{kZ_0}{4} H_0^{(2)}(k\rho_0) \approx -\frac{kZ_0}{4} \sqrt{\frac{2j}{\pi k\rho_0}} e^{-jk\rho_0} \quad (10.14)$$

将 (10.13) 式代入前述本征函数的解, 再除以 (10.14) 式, 得单位幅度平面波入射时, 电极化条件下, 导电劈散射场的本征函数解为:

$$E_z = \frac{2}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_\nu j^\nu J_\nu(k\rho) \sin(\nu\varphi) \sin(\nu\varphi_0) \quad (10.15)$$

磁极化时, 要关于二维单位磁流源在自由空间的辐射场转为单位幅度平面波时的因子归一化, 即

$$H_z = -\frac{k}{4Z_0} H_0^{(2)}(k\rho_0) \approx -\frac{k}{4Z_0} \sqrt{\frac{2j}{\pi k\rho_0}} e^{-jk\rho_0} \quad (10.16)$$

于是本征函数解为

$$H_z = \frac{2}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_\nu j^\nu J_\nu(k\rho) \cos(\nu\varphi) \cos(\nu\varphi_0) \quad (10.17)$$

一般地, 上述本征函数解可改写为:

$$E_z = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_\nu j^\nu J_\nu(k\rho) [\cos \nu(\varphi - \varphi_0) - \cos \nu(\varphi + \varphi_0)] \quad (10.18a)$$

$$H_z = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_\nu j^\nu J_\nu(k\rho) [\cos \nu(\varphi - \varphi_0) + \cos \nu(\varphi + \varphi_0)] \quad (10.18b)$$

上述结果分属电极化与磁极化两种情况, 一般为两者之和. 上述结果是总场, 包括入射场、反射场和绕射场. 为保证精度, 一般要求最后几项  $\nu \gg k\rho$ , 当  $k\rho$  较大时, 收敛很慢.

### 10.2.2 绕射场的分离

上述结果中都包含了  $\cos(\varphi - \varphi_0)$  和  $\cos(\varphi + \varphi_0)$  项, 且形式相同, 故可仅取其中一项讨论, 令  $\beta^\mp = \varphi \mp \varphi_0$ , 于是

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_\nu j^\nu J_\nu(k\rho) \cos(\nu\beta) \quad \nu = \frac{m}{n}$$

利用恒等式:

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_\nu j^\nu f(\nu) = -j \oint_P \frac{\exp\{j\alpha(\frac{\pi}{2} - n\pi)\} f(\alpha)}{\sin(\alpha n\pi)} d\alpha \quad (10.19a)$$

$$\text{以及 } J_\alpha(k\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_c e^{-j(k\rho \sin\theta - \alpha\theta)} d\theta \quad (10.19b)$$

上式可化为

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \int_C e^{-jk\rho \sin\theta} G(\theta) d\theta, \text{ 其中 } G(\theta) = -j \oint_P \frac{e^{j\alpha(\frac{\pi}{2} - n\pi)}}{\sin(\alpha n\pi)} \cos\alpha\beta e^{j\alpha\theta} d\alpha$$

上式中积分路径  $C$  和  $P$  分别为再利用恒等式 (10.19a) 将  $G(\theta)$  变为级数形式, 并令  $\xi = \frac{\pi}{2} + \theta$ , 则

$$G(\theta) \rightarrow G(\xi) = \frac{j}{n} \frac{\sin \frac{\xi}{n}}{\cos \frac{\beta}{n} - \cos \frac{\xi}{n}}$$

而解为

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \int_C e^{jk\rho \cos\xi} G(\xi) d\xi \quad (10.20)$$