

第 11 章 分数阶 Fourier 分析

自从法国科学家 Fourier 在 1807 年为了得到热传导方程简便解法首次提出 Fourier 分析技术以来, Fourier 变换迅速得到了广泛应用, 在科学研究与工程技术的几乎所有领域发挥着重要的作用. 但随着研究对象和研究范围的不断扩展, 也逐步暴露了 Fourier 变换在研究某些问题的局限性. 这种局限性主要体现在: 它是一种全局性变换, 得到的是信号的整体频谱, 因而无法表述信号的时频局部特性, 而这种特性正是非平稳信号的最根本和最关键的性质. 为了分析和处理非平稳信号, 人们提出并发展了一系列新的信号分析理论: 分数阶 Fourier 变换、短时 Fourier 变换、Wigner 分布、Gabor 变换、小波变换、循环统计量理论和调幅-调频信号分析等. 而分数阶 Fourier 变换作为一种新的信号分析理论与方法引起了广泛关注^[61].

分数阶 Fourier 变换 (FRFT, Fractional Fourier Transformation) 的概念很早就被导出, 直到 1980 年 Namias^[36] 把 FRFT 定义为传统 Fourier 变换的分数幂的形式, 并揭示了 FRFT 的几个特性, 开始了 FRFT 严格的数学定义. 他将是分数阶 Fourier 变换作为 Fourier 变换算子的非整数次幂运算结果来引进的. 基本的想法是把经典 Fourier 变换的全部特征值作为一般的复数进行幂次运算, 将所得结果作为一个新变换的特征值并利用 Fourier 变换的特征函数二者合一, 从而构造得到与前述幂次相同的分数阶 Fourier 变换. 因此, V. Namias 研究的分数阶 Fourier 变换是经典 Fourier 变换在分数级次上的推广.

1987 年, A. C. McBride 和 F. H. Kerr 用积分形式从数学上严格定义了分数阶 Fourier 变换^[31]. 1993 年 Mendlovic、Ozaktas 和 Lohamann 给出了分数阶 Fourier 变换的光学实现^[33,38], 并将之应用于光学信息处理. 由于采用光学设备很容易实现分数阶 Fourier 变换, 所以分数阶 Fourier 变换首先在光信号处理中得到了广泛的应用. 然而, 由于一直没有找到分数阶 Fourier 变换的快速算法, 使得其在电信号处理应用领域中一直没有能占据其应有的位置.

1994 年, Almeida^[1] 指出分数阶 Fourier 变换可以理解为时频平面的旋转. 20 世纪 90 年代中期, 人们提出了几种 FRFT 的离散化方法^[5,40,41]. 其中以 Ozaktas^[39] 提出的分解型的快速算法最具应用价值. Ozaktas 将分数阶 Fourier 变换的离散化过程分解为离散卷积的运算, 并借助与 FFT 来实现, 从而使离散 FRFT 的计算具有可以和 DFT 的计算相比拟的运算量.

1995 年, 施纯青 (C. C. Shih)^[48] 首先提出了复数阶 Fourier 变换-态函数叠加的方法, 利用经典 Fourier 变换整数幂运算的 4 周期性质将新的分数阶 Fourier 变换定义成四个态函数的线性组合, 其组合系数是分数阶 Fourier 变换幂次的函数. 分数阶 Fourier 变换的理论和方法近年来已经成为国内外的一个研究热点.

11.1 分数阶微积分

分数阶微积分是一个研究任意阶次的微分、积分算子特性及应用的数学问题, 其发展几乎与整数阶微积分同步. 分数阶导数的设想最早由 L'Hopital 和 Leibniz 于 1695 年提出. 随后, Laplace、Fourier、Abel 等数学家都曾提出过关于分数阶微分的定义. 1823 年 Liouville 给出了第

一个广为接受的分数阶导数的定义; 1847 年, Riemann 在此基础上又作了进一步的补充, 从而形成了较为完备的 Riemann-Liouville 分数阶微积分定义. 此后, Grünwald 和 Letnikov 联合提出使用更为广泛的 Grünwald-Letnikov 分数阶微积分定义. 其中不仅微分、积分算子有统一的表达式, 而且更易于数字实现. 近 20 年来, 分数阶微积分开始较多地用于实际工程.

11.1.1 定义的引入

I. Riemann-Liouville 分数阶微积分

考虑一个积分下限为 c 的 n 重积分式^[34]

$${}_c D_x^{-n} f(x) = \int_c^x dx_1 \int_c^{x_1} dx_2 \int_c^{x_2} dx_3 \cdots \int_c^{x_{n-1}} f(t) dt \quad (11.1)$$

其中 f 在积分界 $[c, b]$ 内连续, $b > x$. 考虑另一函数 $G(x, t)$ 在 $[c, b] \times [c, b]$ 上连续, 则可以交换积分次序

$$\int_c^x dx_1 \int_c^{x_1} G(x_1, t) dt = \int_c^x dt \int_t^x G(x_1, t) dx_1 \quad (11.2)$$

特别地, 若 $G(x, t)$ 仅是 t 的函数,

$$G(x_1, t) \equiv f(t)$$

则式 (11.2) 可写为

$$\int_c^x dx_1 \int_c^{x_1} f(t) dt = \int_c^x f(t) dt \int_t^x dx_1 = \int_c^x (x-t) f(t) dt \quad (11.3)$$

于是将二重积分化简为一重. 反复迭代这一过程至 n 次, 式 (11.1) 化为

$${}_c D_x^{-n} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_c^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (11.4)$$

显然, 式 (11.4) 的右端对任何实部大于 0 的 n 都有意义, 于是将

$$\frac{d^{-\nu} f}{[d(x-c)]^{-\nu}} = {}_c D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt, \quad \Re(\nu) > 0 \quad (11.5)$$

称为 f 的 ν 阶 Riemann 分数阶积分. 一般地, 称

$$-{}_{-\infty} D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt \quad (11.6)$$

为 Liouville 分数阶积分. 称 $c = 0$ 的特例

$${}_0D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt \quad (11.7)$$

为 Riemann-Liouville 分数阶积分.

到此我们已经为 $D^{-\nu}$, $\Re(\nu) > 0$ 给出了分数阶积分的意义. 与之相对地, 设 $\Re(\mu) > 0$, n 是大于 $\Re(\mu)$ 的最小整数, 令 $\nu = n - \mu$, 则

$$0 < \Re(\nu) \leq 1$$

设 $f \in C$, 定义 $f(x)$ 的 μ 阶分数阶微分为

$${}_cD_x^\mu f(x) = {}_cD_x^n [{}_cD_x^{-\nu} f(x)] \quad (11.8)$$

II. Grünwald 的分数阶微积分

Grünwald 给出了另一种分数阶微积分的定义 [37]. 考虑熟知的一阶微分的后向差分近似:

$$\frac{d^1 f}{dx^1} \equiv \frac{d}{dx} f(x) \equiv \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left\{ [\delta x]^{-1} [f(x) - f(x - \delta x)] \right\} \quad (11.9)$$

类似地

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \equiv \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left\{ [\delta x]^{-2} [f(x) - 2f(x - \delta x) + f(x - 2\delta x)] \right\} \quad (11.10)$$

从上述二式中可以看出, 我们可以用二项式系数和交替变换的符号来构造这一差分格式, 这样, 对于正整数 n , 有如下的一般表达式:

$$\frac{d^n f}{dx^n} \equiv \lim_{\delta x \rightarrow 0} [\delta x]^{-n} \sum_{j=0}^n [-1]^j \binom{n}{j} f(x - j\delta x) \quad (11.11)$$

为了确定 $\delta x \rightarrow 0$ 的形式, 也为了便于与积分形式统一, 这里使 δx 以离散方式趋于 0, 选择 $\delta_N x \equiv [x - c]/N$, $N = 1, 2, \dots$, 其中 c 是比 x 小的数值, 则 n 阶导数可定义为

$$\frac{d^n f}{dx^n} \equiv \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} [\delta_N x]^{-n} \sum_{j=0}^n [-1]^j \binom{n}{j} f(x - j\delta_N x) \quad (11.12)$$

注意到 $j > n$, n 为整数时, $\binom{n}{j} = 0$, 于是上式可改写为

$$\begin{aligned} \frac{d^n f}{dx^n} &\equiv \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} [\delta_N x]^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} [-1]^j \binom{n}{j} f(x - j\delta_N x) \\ &\equiv \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left[\frac{x-c}{N} \right]^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} [-1]^j \binom{n}{j} f\left(x - j \left[\frac{x-c}{N} \right]\right) \end{aligned} \quad (11.13)$$

再来看积分的情况. 首先用 Riemann 和的极限来表示积分, 有

$$\begin{aligned} \frac{d^{-1} f}{[d(x-c)]^{-1}} &\equiv \int_c^x f(y) dy \\ &\equiv \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left\{ \delta_N x [f(x) + f(x - \delta_N x) + f(x - 2\delta_N x) + \cdots + f(c + \delta_N x)] \right\} \\ &\equiv \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \delta_N x \sum_{j=0}^{N-1} f(x - j\delta_N x) \end{aligned} \quad (11.14)$$

其中 $\delta_N x$ 定义同前, 若类似地做二重积分, 有

$$\begin{aligned} \frac{d^{-2} f}{[d(x-c)]^{-2}} &\equiv \int_c^x dx_1 \int_c^{x_1} f(x_0) dx_0 \\ &\equiv \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left\{ [\delta_N x]^2 [f(x) + 2f(x - \delta_N x) + 3f(x - 2\delta_N x) + \cdots + Nf(c + \delta_N x)] \right\} \\ &\equiv \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} [\delta_N x]^2 \sum_{j=0}^{N-1} (j+1) f(x - j\delta_N x) \end{aligned} \quad (11.15)$$

类似地, 若做 n 重迭代之后, 可以找出系数的规律

$$\begin{aligned} \frac{d^{-n} f}{[d(x-c)]^{-n}} &\equiv \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} [\delta_N x]^n \sum_{j=0}^{N-1} \binom{j+n-1}{j} f(x - j\delta_N x) \\ &\equiv \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left[\frac{x-c}{N} \right]^n \sum_{j=0}^N \binom{j+n-1}{j} f\left(x - j \left[\frac{x-c}{N} \right]\right) \end{aligned} \quad (11.16)$$

比较式 (11.16) 和 (11.13), 注意到二项式系数的性质

$$[-1]^j \binom{n}{j} = \binom{j-n-1}{j} = \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j+1)} \quad (11.17)$$

可以得出一个微积分的统一表达式

$$\frac{d^v f}{[d(x-c)]^v} \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(-v)} \left[\frac{x-c}{N} \right]^{-v} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-v)}{\Gamma(j+1)} f \left(x - j \left[\frac{x-c}{N} \right] \right) \quad (11.18)$$

$c = 0$ 时, 也写作

$$D^v f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(-v)} \left(\frac{x}{n} \right)^{-v} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(j-v)}{\Gamma(j+1)} f \left(x - j \frac{x}{n} \right) \quad (11.19)$$

Grünwald 的定义是比较基础的, 计算时并不一定要直接求取极限, 只需取 n 为较大值即可获得渐近结果.

11.1.2 分数阶微积分的性质

分数阶微积分具有一系列有趣的数学性质, 其中一些主要性质如下^[15]:

1. 分数阶微积分算子是线性算子, 故满足一般的线性、齐次和尺度关系:

$$\frac{d^\alpha [f_1(x) + f_2(x)]}{dx^\alpha} = \frac{d^\alpha f_1(x)}{dx^\alpha} + \frac{d^\alpha f_2(x)}{dx^\alpha} \quad (11.20)$$

$$\frac{d^\alpha A f(x)}{dx^\alpha} = A \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \quad (11.21)$$

$$\text{对于积分下界 } c = 0, \quad \frac{d^\alpha f(Cx)}{dx^\alpha} = C^\alpha \frac{d^\alpha f(Cx)}{d(Cx)^\alpha} \quad (11.22)$$

2. 分数阶微积分具有半群的特征

$${}_0D_c^\alpha {}_0D_c^\beta f(x) = {}_0D_c^\beta {}_0D_c^\alpha f(x) = {}_0D_c^{\alpha+\beta} f(x) \quad (11.23)$$

3. 分数阶微积分和传统微积分的一个显著区别就是, 连续函数在某点上的分数阶微分并不是在该点处求极限, 而是与初始时刻至该点以前所有时刻的函数值有关, 因此它具有“记忆”特性.

4. 下面我们观察对于常数函数 $f(x) = A$ 的分数阶微分. 对于下界为 c 的 α 次微分而言

$${}_cD_x^\alpha f(x) = \frac{d^\alpha f(x)}{d(x-c)^\alpha} = \frac{d^\alpha A}{d(x-c)^\alpha} = \frac{A}{\Gamma(1-\alpha)} (x-c)^{-\alpha}, \quad \text{对于 } x > c. \quad (11.24)$$

可以发现, 对于常数的 α 阶分数阶微分不为零.

5. 对于 Dirac δ 函数和阶跃函数的分数阶微积分也较为特殊. 对于 $\alpha < 0$,

$${}_c D_x^\alpha \delta(x-d) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} (x-d)^{-\alpha-1}, \quad \text{对于 } c < d < x. \quad (11.25)$$

对于 $\alpha > 0$ 的情况可以用式 (11.8) 求解. 对于阶跃函数,

$${}_c D_x^\alpha U(x-d) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (x-d)^{-\alpha}, \quad \text{对于 } c < d < x. \quad (11.26)$$

6. 分数阶微积分也可以用于描述很多特殊函数, 例如, Bessel 函数 $J_\nu(x)$ (ν 可以是非整数) 可以表示为

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(2x)^{-\nu}} {}_0 D_{x^2}^{-\nu-\frac{1}{2}} \frac{\cos x}{x} \quad (11.27)$$

7. 分数阶微分的 Fourier 变换. 我们熟知的整数阶 Fourier 变换公式

$$\mathcal{F} [f^{(n)}(x)] = (j\omega)^n F(\omega) \quad (11.28)$$

显然, 若将其中的 n 加以推广, 到任意实数或复数 ν , 再进行 Fourier 反变换, 就可以得到分数阶微分结果. 若 $\nu < 0$, 则可以得到分数阶积分结果. 如图 11.1 是对高斯脉冲作不同阶数微分后的结果.

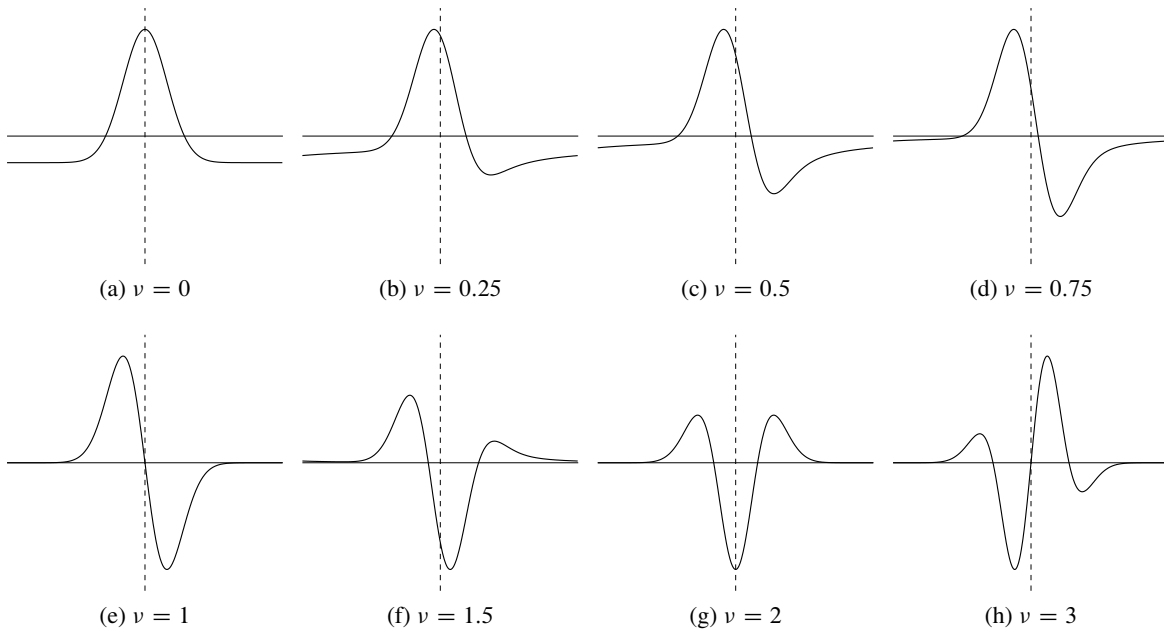


图 11.1 对高斯脉冲作分数阶微分

11.2 分数阶 Fourier 变换

Fourier 变换将相对独立的时域和频域联系起来, 从整体上展示信号曾经出现过的频率成分, 适于分析确定性信号和平稳信号. 对频率成分随时间变化的非平稳信号提出了时频分析, 它将一维的时域信号映射为二维的时频平面, 全面反映信号随时间变化的频率分布特征. Fourier 变换是一种线性算子, 在时频平面, 若将其看作从时间轴逆时针旋转 $\pi/2$ 到频率轴, 则分数阶 Fourier 变换算子就是可旋转任意角度 α 的算子, 可以认为分数阶 Fourier 变换是 Fourier 变换的一种推广.

11.2.1 FRFT 的定义

分数阶 Fourier 变换的变换核 K_α 定义为^[2]

$$K_\alpha(t, u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}} e^{j\frac{1}{2}(t^2+u^2) \cot \alpha - jut \csc \alpha} & \alpha \neq n\pi \\ \delta(t - u) & \alpha = 2n\pi \\ \delta(t + u) & \alpha = (2n + 1)\pi \end{cases} \quad (11.29)$$

一种较为方便的算法中可以预先作变换

$$\sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}} = \sqrt{\frac{-je^{j\alpha}}{2\pi \sin \alpha}} \quad (11.30)$$

于是 $x(t)$ 的 α 次 FRFT 就可表示为

$$\begin{aligned} X_\alpha(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) K_\alpha(t, u) dt \\ &= \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}} e^{j\frac{u^2}{2} \cot \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\frac{t^2}{2} \cot \alpha - jut \csc \alpha} dt & \alpha \neq n\pi \\ x(t) & \alpha = 2n\pi \\ x(-t) & \alpha = (2n + 1)\pi \end{cases} \end{aligned} \quad (11.31)$$

由此可以看出, FRFT 的运算可以分为如下四步:

1. 乘以 chirp 信号, chirp 信号即频率随时间线性增加的信号;
2. 作 Fourier 变换, 其中自变量有尺度变换 $\csc \alpha$;
3. 再乘以 chirp 信号;
4. 再乘以复常数.

图 11.2 给出了一个宽度为 2, 幅度为 1 的脉冲信号, 在不同 α 角度下得出的 FRFT 变换结果. 其中实线为实部, 虚线为虚部.

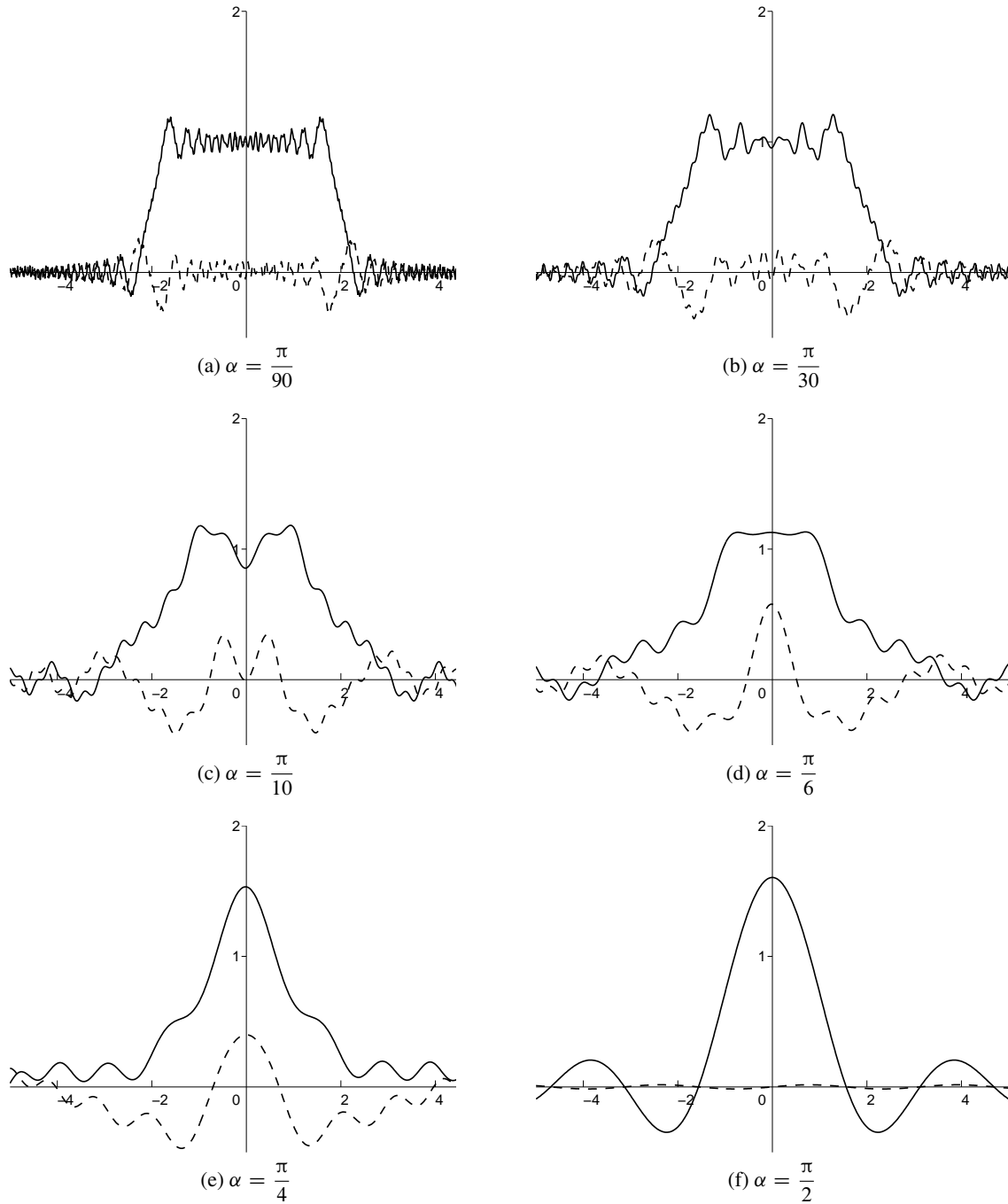


图 11.2 脉冲信号的 FRFT 变换

11.2.2 FRFT 的性质

令 \mathcal{F}_α 代表旋转 α 角度的 FRFT 变换. 其一些重要性质如下:

1. \mathcal{F}_0 为单位算子. $\mathcal{F}_{2\pi}$ 对应做 4 次普通 Fourier 变换, 故也为单位算子. $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{2\pi} = I$.

2. $\mathcal{F}_{\pi/2}$ 为普通 Fourier 变换.
3. 线性特性. $\mathcal{F}_{\alpha} [ax(t) + by(t)] = aX_{\alpha}(u) + bY_{\alpha}(u)$.
4. 旋转叠加. $\mathcal{F}_{\alpha}\mathcal{F}_{\beta} = \mathcal{F}_{\alpha+\beta}$.
5. 时间反转. $\mathcal{F}_{\alpha} [x(-t)] = X_{\alpha}(-u)$.
6. 反变换. $-\alpha$ 阶 FRFT 是 α 阶 FRFT 的反变换. $\mathcal{F}_{-\alpha}\mathcal{F}_{\alpha} = \mathcal{F}_{\alpha-\alpha} = \mathcal{F}_0 = I$.
7. Parseval 定理. Parseval 定理也可以推广到 FRFT.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_{\alpha}(u)Y_{\alpha}^*(u) du \quad (11.32)$$

以及功率保持特性

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |X_{\alpha}(u)|^2 du \quad (11.33)$$

8. 时移特性

$$\mathcal{F}_{\alpha} [x(t - \tau)] = e^{j\frac{\tau^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha - j\tau \sin \alpha} X_{\alpha}(u - \tau \cos \alpha) \quad (11.34)$$

9. 频移特性

$$\mathcal{F}_{\alpha} [x(t) e^{jvt}] = e^{-j\frac{v^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha + jvu \cos \alpha} X_{\alpha}(u - v \sin \alpha) \quad (11.35)$$

10. 尺度特性

$$\mathcal{F}_{\alpha} [x(ct)] = \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{c^2 - j \cot \alpha}} \exp \left[j \frac{u^2}{2} \cot \alpha \left(1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} \right) \right] X_{\beta} \left(\frac{u \sin \beta}{c \sin \alpha} \right), \quad \text{其中 } \cot \beta = \frac{\cot \alpha}{c^2} \quad (11.36)$$

11. 微分特性

$$\mathcal{F}_{\alpha} (x'(t)) = X'_{\alpha}(u) \cos \alpha + ju \sin \alpha X_{\alpha}(u) \quad (11.37)$$

12. 积分特性

$$\mathcal{F}_{\alpha} \left(\int_a^t x(t') dt' \right) = \sec \alpha e^{-j\frac{u^2}{2} \tan \alpha} \int_a^u X_{\alpha}(z) e^{j\frac{z^2}{2} \tan \alpha} dz, \quad \text{其中 } \alpha \neq \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (11.38)$$

13. 倍乘特性

$$\mathcal{F}_{\alpha} [tx(t)] = u \cos \alpha X_{\alpha}(u) + j \sin \alpha X'_{\alpha}(u) \quad (11.39)$$

14. 倍除特性

$$\mathcal{F}_{\alpha} \left[\frac{x(t)}{t} \right] = j \sec \alpha e^{j\frac{u^2}{2} \cot \alpha} \int_{-\infty}^u x(z) e^{-j\frac{z^2}{2} \cot \alpha} dz, \quad \text{其中 } a \neq n\pi \quad (11.40)$$

15. 对于实信号 $x(t)$, 有对称特性

$$\begin{aligned}
 X_{\alpha}^*(u) &= \left(\sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \right)^* \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j\frac{u^2+t^2}{2}\cot\alpha + jut\csc\alpha} dt \\
 &= \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\frac{u^2+t^2}{2}\cot(-\alpha) - jut\csc(-\alpha)} dt \\
 &= X_{-\alpha}(u)
 \end{aligned} \tag{11.41}$$

11.2.3 FRFT 与时频分析

分数阶 Fourier 变换是角度为 α 的时频面旋转. 这个性质建立起分数阶 Fourier 变换与时频分布间的直接联系, 并且为分数阶 Fourier 域理解为一种统一的时频变换域奠定了理论基础, 同时也为分数阶 Fourier 变换在信号处理领域中的应用提供了有利条件. 以 Wigner 分布 (WD) 为例, 信号 x 的 WD 定义为

$$\bar{X}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau \tag{11.42}$$

通过适当代换积分变量, 也可以化为

$$\bar{X}(t, \omega) = 2e^{2j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) x^*(2t - \tau) e^{-2j\omega\tau} d\tau \tag{11.43}$$

利用式 (11.34) FRFT 的时移特性, 可将 $x^*(2t - \tau)$ 表示为

$$x^*(2t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X_{\alpha}^*(-z + 2t \cos \alpha) e^{-2jt^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2jzt \sin \alpha} K_{\alpha}(\tau, z) dz \tag{11.44}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \bar{X}(t, \omega) &= 2e^{2j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} X_{\alpha}^*(-z + 2t \cos \alpha) e^{-2jt^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2jzt \sin \alpha} K_{\alpha}(\tau, z) e^{-2j\omega\tau} d\tau dz \\
 &= 2e^{2j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} X_{\alpha}^*(-z + 2t \cos \alpha) e^{-2jt^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2jzt \sin \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-2j\omega K_{\alpha}(\tau, z)\tau} d\tau dz
 \end{aligned} \tag{11.45}$$

利用式 (11.35) 的频移特性, 计算里面一重积分, 有

$$\begin{aligned}
 \bar{X}(t, \omega) &= 2e^{2j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} X_{\alpha}(z + 2\omega \sin \alpha) X_{\alpha}^*(-z + 2t \cos \alpha) \cdot \\
 &\quad e^{-2j(t^2 + \omega^2) \sin \alpha \cos \alpha + 2jzt \sin \alpha - 2jz\omega \cos \alpha} dz
 \end{aligned} \tag{11.46}$$

作变量代换 $\varepsilon = z + \omega \sin \alpha$, 可得

$$\bar{X}(t, \omega) = 2e^{2j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} X_{\alpha}(\varepsilon) X_{\alpha}^*(-\varepsilon + 2t \cos \alpha + 2\omega \sin \alpha) \cdot e^{2j(\omega^2 - t^2) \sin \alpha \cos \alpha + 2j\varepsilon(t \sin \alpha - \omega \cos \alpha - 4j\omega t \sin^2 \alpha)} d\varepsilon \quad (11.47)$$

如果我们作变量代换

$$\begin{cases} u = t \cos \alpha + \omega \sin \alpha \\ v = -t \sin \alpha + \omega \cos \alpha \end{cases} \quad (11.48)$$

化简后可以得到

$$\bar{X}(t, \omega) = 2e^{2j\omega v} \int_{-\infty}^{\infty} X_{\alpha}(\varepsilon) X_{\alpha}^*(2u - \varepsilon) e^{-2jv\varepsilon} d\varepsilon \quad (11.49)$$

这正是采用 (u, v) 坐标系计算的 WD. 此式证明了 X_{α} 的 WD 就是 x 的 WD 坐标轴旋转 α . 如图 11.3 所示. 类似的关系对于模糊函数修正的短时 Fourier 变换和谱图依然成立. 分数阶 Fourier 变换提供了信号从时域到频域全过程的综合描述, 随着阶数从 0 连续增长到 1, 分数阶 Fourier 变换展示出信号从时域逐步变化到频域的所有变化特征. 可见, 分数阶 Fourier 变换实际上体现了一种统一的时频观, 是介于时域和频域之间的信号时频分析方法, 可以为信号的时频分析提供更大的选择余地.

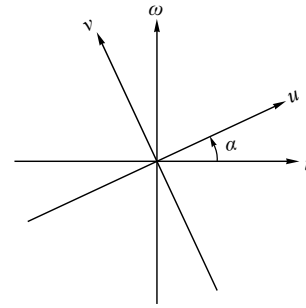


图 11.3 时频平面逆时针旋转 α