

第5章 各种泛函解法

5.1 概述

同一电磁场问题可以从微分方程、积分方程、变分方程三类不同的方程形式着手求解, 结果是等价的. 但微分方程和积分方程较难求解, 只能依靠泛函方法求得近似解或函数的完备序列. (若泛函的每个可取函数都可以用某个函数序列的线性组合任意地逼近, 则该序列为完备序列. 通常, 本征函数系都是正交函数的完备序列.)

泛函解法的基本思想

$$U(\mathbf{r}) = \sum_v c_v \varphi_v(\mathbf{r}), \quad (5.1)$$

式中 $\{\varphi_v(\mathbf{r})|_{v=1,2,\dots}\}$ 是某线性无关函数的完备序列, 该函数序列的函数当作函数空间的基或坐标, 称为基函数或坐标函数, 则展开项 $\{c_v \varphi_v\}$ 为 U 在函数空间的坐标分量. 若选取正交函数基序列时, c_k 是函数空间中的点 U 对基 φ_k 投影的意义. ($\mathbf{r} = a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z}$). 一般情况下只能求 n 级近似解

$$U^{[n]} = \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v \quad (5.2)$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} U^{[n]} = U$, 所以基函数选取是关键, 影响收敛速度及求解繁简程度.

泛函解法分为变分法和加权余量法两大类. 总是将未知函数的变分方程或线性算子方程转化为展开系数序列的线性代数方程组.

5.2 Rayleigh-Ritz 法

简称 Ritz 法, 为变分法的一种. 设泛函 $J\{U(\mathbf{r})\}$ 变分问题¹

$$\begin{cases} \delta J\{U(\mathbf{r})\} = 0 \\ U(\mathbf{r}_b)|_{\mathbf{r}_b \in S[V]} = 0 \quad (\text{或无边界条件}) \end{cases} \quad (5.3)$$

选取满足所给边界条件的线性无关完备函数序列 $\{\varphi_v(\mathbf{r})\}$ 为基, 构造 n 级近似解 $U^{[n]}$, 则变分方程 (5.3) 可写成近似变分方程

$$\delta J\{U^{[n]}(\mathbf{r})\} = \delta J\left\{\sum_{v=1}^n c_v \varphi_v(\mathbf{r})\right\} = 0 \quad (5.4)$$

注意 $\varphi_v(\mathbf{r})$ 是已知函数, 所以泛函 $J\{U^{[n]}(\mathbf{r})\}$ 仅是 c_v 及 $c_v^*(v = 1, 2, \dots, n)$ 的函数, 故 (5.4)

¹若边界条件为 $U(\mathbf{r}_b)|_{\mathbf{r}_b \in S[V]} = \text{const} \neq 0$, 则可通过转换为 $U(\mathbf{r}_b)|_{\mathbf{r}_b \in S[V]} = 0$

等价于偏微分方程组 (5.3) (多元函数的极值条件):

$$\frac{\partial J \{U^{[n]}\}}{\partial c_v} = 0, \quad \text{且} \quad \frac{\partial J \{U^{[n]}\}}{\partial c_v^*} = 0, \quad v = 1, 2, \dots, n \quad (5.5)$$

下面分别讨论不同类型泛函的变分解法.

5.2.1 根据物理原理的直接变分解

设物理原理 (如电磁场原理) 导出的变分方程, 其泛函式为

$$J \{U(\mathbf{r})\} = \iiint_V F[\mathbf{r}, U, U'_x, U'_y, U''_{xx}, \dots] dv$$

则 (5.5) 式简化为

$$\frac{\partial F}{\partial c_v} = \frac{\partial F}{\partial U} \varphi_v + \frac{\partial F}{\partial U'_x} \frac{\partial \varphi_v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial U'_y} \frac{\partial \varphi_v}{\partial y} + \dots + \frac{\partial F}{\partial U''_{xx}} \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial x^2} + \dots = 0, \quad v = 1, 2, \dots, n \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial c_v} = \frac{\partial F}{\partial U} \varphi_v + \frac{\partial F}{\partial U'_x} \frac{\partial \varphi_v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial U'_y} \frac{\partial \varphi_v}{\partial y} + \dots + \frac{\partial F}{\partial U''_{xx}} \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial x^2} + \dots = 0$$

5.2.2 确定性算子方程的变分解

设由线性正算子 \mathbf{A} 的确定性方程 $\mathbf{A}U = f$ 导出的变分方程:

$$\delta J \{U\} = \delta [\langle \mathbf{A}U, U \rangle - \langle U, f \rangle - \langle f, U \rangle] = 0 \quad (5.7)$$

将近似解 $U^{[n]}$ 代入其泛函式 $J\{U\}$, 得

$$\begin{aligned} J \{U^{[n]}\} &= \left\langle \mathbf{A} \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v, \sum_{\mu=1}^n c_\mu \varphi_\mu \right\rangle - \left\langle \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v, f \right\rangle - \left\langle f, \sum_{\mu=1}^n c_\mu \varphi_\mu \right\rangle \\ &= \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^n c_v c_\mu^* \langle \mathbf{A} \varphi_v, \varphi_\mu \rangle - \sum_{v=1}^n c_v \langle \varphi_v, f \rangle - \sum_{\mu=1}^n c_\mu^* \langle f, \varphi_\mu \rangle \end{aligned} \quad (5.8)$$

注意到 $\frac{\partial J \{U^{[n]}\}}{\partial c_\mu^*} = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, n$, 从而由式 (5.8) 可得

$$\sum_{v=1}^n c_v \langle \mathbf{A} \varphi_v, \varphi_\mu \rangle = \langle f, \varphi_\mu \rangle, \quad \mu = 1, 2, \dots, n \quad (5.9)$$

记内积值: $a_{\mu v} = \langle \varphi_\mu, \mathbf{A} \varphi_v \rangle, f_\mu = \langle \varphi_\mu, f \rangle$, 得矩阵 $[c_v]_{n \times 1}, [f_\mu]_{n \times 1}, [a_{\mu v}]_{n \times n}, [\varphi_v]_{n \times 1}$, 则可

将 (5.9) 式写成矩阵

$$[a_{\mu\nu}^*][c_\nu] = [f_\mu^*] \quad (5.10)$$

于是可得到 n 级近似解

$$[c_\nu] = [a_{\mu\nu}^*]^{-1} [f_\mu^*], \quad U^{[n]}(\mathbf{r}) = [\varphi_\nu(\mathbf{r})]^T [c_\nu] \quad (5.11)$$

5.2.3 广义本征值算子方程的变分解

已知广义本征值算子方程的等价变分方程

$$J\{U\} = \frac{\langle \mathbf{A}U, U \rangle}{\langle \mathbf{B}U, U \rangle} = \lambda = \min \quad (5.12)$$

将 n 级近似解 (5.2) 式代入, 得

$$J\{U^{[n]}\} = \frac{\left\langle \mathbf{A} \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu, \sum_{\mu=1}^n c_\mu \varphi_\mu \right\rangle}{\left\langle \mathbf{B} \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu, \sum_{\mu=1}^n c_\mu \varphi_\mu \right\rangle} = \lambda^{[n]},$$

从而得

$$\sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n c_\nu c_\mu^* \langle \mathbf{A}\varphi_\nu, \varphi_\mu \rangle - \lambda^{[n]} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n c_\nu c_\mu^* \langle \mathbf{B}\varphi_\nu, \varphi_\mu \rangle = 0 \quad (5.13)$$

(5.13) 式两边对 c_μ^* 求偏导, 得

$$\sum_{\nu=1}^n c_\nu \left[\langle \mathbf{A}\varphi_\nu, \varphi_\mu \rangle - \lambda^{[n]} \langle \mathbf{B}\varphi_\nu, \varphi_\mu \rangle \right] = 0 \quad (5.14)$$

记内积值 $a_{\mu\nu} = \langle \varphi_\mu, \mathbf{A}\varphi_\nu \rangle$, $b_{\mu\nu} = \langle \varphi_\mu, \mathbf{B}\varphi_\nu \rangle$, 得矩阵: $[c_\nu]_{n \times 1}$, $[a_{\mu\nu}]_{n \times n}$, $[b_{\mu\nu}]_{n \times n}$, $[\varphi_\nu]_{n \times 1}$, 则可将 (5.14) 式写成矩阵方程

$$\left([a_{\mu\nu}^*] - \lambda^{[n]} [b_{\mu\nu}^*] \right) [c_\nu] = 0 \quad (5.15)$$

该方程有非零解的条件是系数行列式值为零: (由于 λ 为实数, 故所有 “*” 可略去)

$$P_n(\lambda^{[n]}) = \det([a_{\mu\nu}^*] - \lambda^{[n]} [b_{\mu\nu}^*]) = \det[a_{\mu\nu} - \lambda^{[n]} b_{\mu\nu}] = 0 \quad (5.16)$$

这是一个关于 $\lambda^{[n]}$ 的 n 次多项式, 可解出 n 个 n 级近似的广义本征值:

$$\{\lambda_v^{[n]} |_{v=1,2,\dots,n}; \lambda_v^{[n]} \leq \lambda_{v+1}^{[n]}\}$$

这些解中最小广义本征值 $\lambda_1^{[n]}$ 的准确度较高, 而后序本征值 $\lambda_k (k = 1, 2, 3, \dots)$ 宜利用的后序本征值定理逐个解出.

每得到一个广义本征值 $\lambda_k^{[n]} (k = 1, 2, \dots)$, 代入 (5.16) 式即可求出一个对应的广义本征矢量

$$[c_{v(k)}] = [c_{1(k)}, \dots, c_{n(k)}]^T$$

并构成广义本征函数的 n 级近似解:

$$U_k^{[n]}(\mathbf{r}) = [\varphi_v(\mathbf{r})]^T [c_{v(k)}] \quad (5.17)$$

5.2.4 基函数序列的选择

首先其必须是线性无关的完备序列, 但基函数的选取并没有其他明确的限制, 可以根据问题本身的特点灵活应用, 可以说合适的基函数的选取可以反映数值模型的价值, **运用之妙, 存乎一心.**

最简单实用的是幂函数序列和三角函数序列, 既易于作微积分运算, 又便于适应规则形状边界的第一类齐次边界条件, 如

1. 一维函数 $U(x)$ 若在 $[x_1, x_2]$ 端点满足齐次条件 $U(x_1) = U(x_2) = 0$, 可选取

$$\varphi_v(x) = (x - x_1)^i (x_2 - x)^{v-i} [0 \leq i \leq v], \quad v = 1, 2, \dots, n$$

或 $\varphi_v(x) = \sin\left(v\pi \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right), v = 1, 2, \dots, n$

2. 二维函数 $U(x, y)$ 在闭域 S 的周界 ∂S 上 $U(x, y)|_{\partial S} = 0$, 则设 $w(x, y)|_{\partial S} = 0$, 可取:

$$\begin{cases} \varphi_1 = w(x, y) \\ \varphi_2 = xw(x, y), \quad \varphi_3 = yw(x, y) \\ \varphi_4 = x^2w(x, y), \quad \varphi_5 = xyw(x, y), \quad \varphi_6 = y^2w(x, y) \\ \dots \end{cases}$$

其中 $w(x, y)$ 根据 S 的形状选择. 对矩形域 ($|x| \leq a, |y| \leq b$), 可选:

$$w(x, y) = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$$

对圆形域 ($x^2 + y^2 \leq R^2$), 可选:

$$w(x, y) = R^2 - (x^2 + y^2)$$

对光滑回线 ($F(x, y) = 0$) 内域, 可选:

$$w(x, y) = \pm F(x, y)$$

对凸 m 边形域 ($a_i x + b_i y + c_i = 0, i = 1, 2, \dots, m$), 可选:

$$w(x, y) = \pm \prod_{i=1}^m (a_i x + b_i y + c_i)$$

虽然第二类、第三类的自然边界条件对基函数并无要求, 通常可以选取简单的幂函数序列, 如:

3. 一维函数 $U(x)$ 可选取

$$\varphi_\nu(x) = x^{\nu-1}, \nu = 1, 2, \dots, n$$

4. 二维函数 $U(x, y)$ 可选取

$$\begin{cases} \varphi_1 = 1 \\ \varphi_2 = x, & \varphi_3 = y \\ \varphi_4 = x^2, & \varphi_5 = xy, & \varphi_6 = y^2 \\ \dots \end{cases}$$

另外, 若取满足边界条件的基函数, 近似解序列收敛得较快, 如:

5. 若 $U(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 端点上满足齐次边界条件 $U'(x_1) = U'(x_2) = 0$, 可选:

$$\varphi_\nu(x) = \cos\left(\nu\pi \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right), \nu = 1, 2, \dots, n$$

6. 若 $U(\mathbf{r})$ 在边界上满足非齐次第一类边条 $U(\mathbf{r}_b) = g(\mathbf{r}_b)$, 则设

$$U^{[n]} = \varphi_0 + \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu$$

其中 $\varphi_0(\mathbf{r}_b) = g(\mathbf{r}_b)$, 于是 $(U^{[n]} - \varphi_0) = \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu$ 满足齐次条件 $[U^{[n]}(\mathbf{r}_b) - \varphi_0(\mathbf{r}_b)] = 0$, 可按前述一维二维函数情形选取 φ 和 ν .

对复杂场域或填充不同媒质的场域, 可划分子域. 若子域数很多, 子域内可取较低级 (n 小) 的近似解, 求解程序将演变为**有限元法**. 基函数另一种选择方案是取原算子方程不受边界条件限制时的本征函数 (即原算子方程不受边界条件限制的通解), 如: Trefftz 法.

Rayleigh-Ritz 法简单归纳

- Ritz 法是在给定泛函的前提下, 在全域内选择试探函数 (基函数), 然后求变分极值的方法;
- 试探函数只需要满足强加边界条件 (第一类), 第二、三类自动满足无须考虑, 但若满足有助于近似解的收敛速度的提高;
- Ritz 法最后归结为线性代数方程的求解, 而且系数矩阵一定对称正定;
- 其最大缺点是试探函数 (基函数) 必须满足整个区域, 有限元法就克服了这一缺点, 同时继承了优点.

5.3 近似变分解的改进

5.3.1 Ritz 法的误差估值

显然 n 越大, $U^{[n]}$ 误差越小. 但尚缺乏估计其误差的理论方法. 一般用 $J\{U^{[n-1]}\} - J\{U^{[n]}\}$ 粗略估计 Ritz 法 n 级近似解的误差. 另一方面, 近似解的泛函必大于精确解 U 的泛函值 (极小值), 从而可作为估计精确解泛函的上限. 如果又能找出其下界, 则上、下界之差就是近似解泛函的最大误差. 可用不同方法估计下限.

5.3.2 直接变分问题中泛函极值的上、下界

若可能分别建立欲求物理量 P 及其倒数量 P^{-1} 的泛函极小值问题:

$$P = J_1\{U\} = \min, \quad \frac{1}{P} = J_2\{U\} = \min,$$

并各自用 Ritz 法求出近似解 $U^{[n]}$ 和 $V^{[m]}$, 对应

$$P^{[n]} = J\{U^{[n]}\}, \quad \left(\frac{1}{P}\right)^{[m]} = J\{U^{[m]}\},$$

则

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{P}\right)^{[m]}} \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{P}\right)} = P \leq P^{[n]}$$

所以 $P^{[n]}, \left[\left(\frac{1}{P}\right)^{[m]}\right]^{-1}$ 可分别视为准确解泛函的上、下限, 它们的差就是近似解泛函的最大误差. 静电问题中的电容量 C , 波导接头问题中的输入阻抗 Z_{in} 等物理量都属这类泛函.

5.3.3 Trefftz 法

静电场 Laplace 边界问题 (齐次方程, 非齐次边界条件):

$$\begin{cases} -\nabla^2 U(\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in V \\ \left(\alpha \frac{\partial}{\partial n} + \beta\right) U(\mathbf{r}_b) = g, & \mathbf{r}_b \in \partial V \end{cases} \quad (5.18)$$

直接用 Ritz 法或转化成齐次边界条件非齐次方程, 都不理想. 另外找到了 $U^{[n]}$ 使 $J\{U^{[n]}\} > J\{U\}$, 还须找 $V^{[m]}$ 使 $J\{V^{[m]}\} < J\{U\}$. Trefftz 法能实现这两项要求 (即不受边界条件限制就找到 $V^{[m]}$).

定理 对 Laplace 问题 (5.18), 若选满足方程而不受边界条件限制的基函数序列 $\{\psi_\mu(\mathbf{r}) | \mu=1,2,\dots\}$; 则 Laplace 方程等价于变分方程 $J\{U\} = \iiint_V |\nabla U|^2 dv = \max$, 且其 m 级近似解可构成为 $V^{[m]}(\mathbf{r}) = \sum_{\mu=1}^m c_\mu \psi_\mu(\mathbf{r})$, 其展开系数得自线性方程组:

$$\sum_{\mu=1}^m c_\mu \iint_{S[V]} \psi_\mu \frac{\partial \psi_\mu}{\partial n} dS = \iint_{S[V]} g \frac{\partial \psi_\mu}{\partial n} dS, \quad \mu = 1, 2, \dots, m \quad (5.19)$$

显然 $J\{V^{[m]}\} < J\{U\}$, 是 $J\{U\}$ 的下限.

5.3.4 Weinstein 法

设广义本征值算子方程 $\mathbf{A}U = \lambda \mathbf{B}U$, 最小本征值 $\lambda_1 = \min \left[\frac{\langle \mathbf{A}U, U \rangle}{\langle \mathbf{B}U, U \rangle} \right]$, 已知 Ritz 法的最小变分解

$$\lambda_1^{[n]} = \min \left[\frac{\langle \mathbf{A}U^{[n]}, U^{[n]} \rangle}{\langle \mathbf{B}U^{[n]}, U^{[n]} \rangle} \right] > \lambda_1 \quad (5.20)$$

可作为估计 λ_1 的上限, 那么对于正算子 \mathbf{B} 退化为函数 $h(\mathbf{r}) \neq 0$, Weinstein 指出了两种估计 λ_1 下限的方法.

定理一 线性下有界算子的本征值方程

$$\mathbf{A}U(\mathbf{r}) = \lambda h(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \quad (5.21)$$

其最小本征值 λ_1 的上限

$$\lambda_1^{[n]} = \min \left[\frac{\langle \mathbf{A}U^{[n]}, U^{[n]} \rangle}{\langle hU^{[n]}, U^{[n]} \rangle} \right] = \left[\frac{\langle \mathbf{A}U_1^{[n]}, U_1^{[n]} \rangle}{\langle hU_1^{[n]}, U_1^{[n]} \rangle} \right] > \lambda_1 \quad (5.22)$$

再计算泛函值:

$$\gamma^{[n]} = \frac{\left\langle \frac{1}{h} U_1^{[n]}, U_1^{[n]} \right\rangle}{\langle hU_1^{[n]}, U_1^{[n]} \rangle}$$

则

$$\left[\lambda_1^{[n]} - \sqrt{r^{[n]} - (\lambda_1^{[n]})^2} \right] < \lambda_1 \quad (5.23)$$

可作为估计 λ_1 准确值的下限 (效果不稳定). $U_1^{[n]}$ 为 Ritz 法求得的对应 $\lambda_1^{[n]}$ 的本征函数.

定理二 对式 (5.21) 及 $\lambda_1^{[n]}, \lambda_2^{[n]}$ 为用 Ritz 法求出的 λ_2 的近似值, 则

$$\left[\lambda_1^{[n]} - \frac{\gamma^{[n]} - (\lambda_1^{[n]})^2}{\lambda_2^{[n]} - \lambda_1^{[n]}} \right] < \lambda_1 \quad (5.24)$$

可作为估计 λ_1 准确值的下限.

5.3.5 调节边界法

设变分方程及边界条件

$$\begin{cases} J \{U(\mathbf{r})\} = \min = \Lambda \\ U(\mathbf{r}_b) = 0, \mathbf{r}_b \in S[v] \end{cases} \quad (5.25)$$

式中 Λ 或是本征值问题的最小本征值, 或是变分问题的泛函极小值 (电容量、输入阻抗). 该泛函 $J \{U\}$ 的可取函数集 \mathcal{D} 受边界条件限制, 且

$$\Lambda = \min_{U \in \mathcal{D}} [J \{U\}]$$

若将可取函数集扩大为 $\mathcal{D}' \supset \mathcal{D}$, 则

$$\Lambda = \min_{U \in \mathcal{D}'} [J \{U\}] \leq \Lambda \quad (5.26)$$

可以作为估计 Λ 准确值的下限. 显然 $(\mathcal{D}' - \mathcal{D})$ 越小, 则 $(\Lambda - \Lambda')$ 也越小, 该下限的作用愈有效. 放松边界条件也可以扩大可取函数集 (如固定边界条件放松为自然边条). 扩大场域 (在新边界上满足条件, 在原有边界上则不必满足) 亦然.

如图 5.1 所示, 若边界是某种简单几何的微扰结果, 则作出内接、外接简单形状的新边界 $S[v'']$ 和 $S[v']$: $v'' \subset v \subset v'$, 使可取函数集 $\mathcal{D}'' \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$, 分别用 Ritz 法求解

$$\begin{cases} \Lambda'' = \min_{U \in \mathcal{D}''} [J\{U\}] \\ \Lambda' = \min_{U \in \mathcal{D}'} [J\{U\}] \end{cases}$$

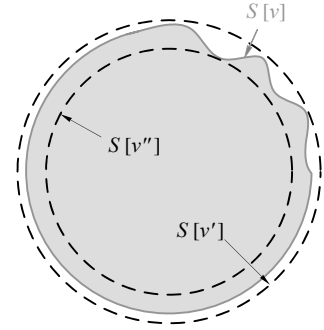


图 5.1 调节边界法

即确定了原问题中待求泛函值 Λ 的上、下限: $\Lambda' \leq \Lambda \leq \Lambda''$, 这种只要求基函数在简单形状新边界上满足

$$\Psi(\mathbf{r}_b) |_{\mathbf{r}_b \in S[v'']} = 0 \quad \text{或} \quad \Psi(\mathbf{r}_b) |_{\mathbf{r}_b \in S[v']} = 0$$

而不需要在原来复杂形状边界上 $S[v]$ 上等于 0, 求解过程比较简单.

5.4 变分法在电磁场问题中的计算实例

5.4.1 波导管传播常数的变分解

均匀截面的柱形波导管以理想导体为管壁, 内部填充各向同性、横向非匀质的无耗介质, 其内电磁场由轴向分量 $E_z(\mathbf{r}, t)$, $H_z(\mathbf{r}, t)$ 完全确定:

$$\begin{cases} E_z(\mathbf{r}, t) \\ H_z(\mathbf{r}, t) \end{cases} = \psi(\mathbf{r}) e^{-\gamma z} e^{-j\omega t} \quad (5.27)$$

I. Helmholtz 本征值问题的变分原理

由分离变量法知 $\psi(\mathbf{r})$ 的二维 Helmholtz 方程的齐次边界条件问题为:

$$\begin{cases} (\nabla_{\perp}^2 + \omega^2 \varepsilon \mu + \gamma^2) \psi(\mathbf{R}) = 0 & (\mathbf{R} \in S) \\ \psi(\mathbf{R}_b) = 0 (E_z) \quad \text{或} \quad \frac{\partial \psi(\mathbf{R}_b)}{\partial n_c} = 0 (H_z) & (\mathbf{R}_b \in C[S]) \end{cases} \quad (5.28)$$

式中 S 为波导管的横截面域, ∇_{\perp}^2 是 S 上的二维 Laplacian 算符, $C[S]$ 为 S 的边界回线, \hat{n}_c 是 $C[S]$ 法向单位矢量.

记线性下有界算子 $\mathbf{A} = -(\nabla_{\perp}^2 + \omega^2 \varepsilon \mu)$ 及待定本征值 $\lambda = \gamma^2$, 则 (5.28) 式方程可写为算子方程

$$\mathbf{A}\psi = \lambda\psi$$

使得该方程有解的本征值序列 $\{\lambda_i\}$ 代表了波导管内电磁场的模式序列; 本征值对应的本征函数 $\{\psi_i(\mathbf{R})\}$ 就是描述波导管横截面中场分布的模式函数. 在实际应用中, 首先求得的是最

小本征值 λ_1 对应的最低模式.

Rayleigh 商的变分方程 根据最小本征值定理, 直接建立 Rayleigh 商的变分方程

$$\lambda = \frac{\langle \mathbf{A}\psi, \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} = \min \quad \text{或} \quad \delta\lambda = 0$$

将 \mathbf{A} 和 λ 代入, 并按内积展开后写成泛函:

$$\begin{aligned} \lambda = \gamma^2 &= \frac{-\iint_S \psi^* \nabla_{\perp}^2 \psi \, ds - \omega^2 \iint_S \varepsilon \mu |\psi|^2 \, ds}{\iint_S |\psi|^2 \, ds} \\ (\text{根据 Green 定理}) &= \frac{\iint_S |\nabla_{\perp}^2 \psi|^2 \, ds - \omega^2 \iint_S \varepsilon \mu |\psi|^2 \, ds - \oint_{C[S]} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n_c} \, dl}{\iint_S |\psi|^2 \, ds} \end{aligned} \quad (5.29)$$

其变分为

$$\delta\gamma^2 = \frac{\oint_{C[S]} \left[\delta\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n_c} - \psi^* \frac{\partial \delta\psi}{\partial n_c} \right] dl}{\iint_S |\psi|^2 \, ds} \quad (5.30)$$

从式 (5.30) 可知, 只有在变分 $\delta\psi(\mathbf{r})$ 及近似解 $\psi^{[n]} = \psi + \delta\psi$ 同准确解 ψ 一样满足齐次边界条件 (E_z —1st B.C., H_z —2nd B.C.) 时, 变分 $\delta\gamma^2$ 才等于 0 (因为 $\delta\psi$ 的任意性), 这要求近似解的基函数都满足同类齐次边界条件, 这对于截面较为复杂的波导管, 一般很难实现.

扩展泛函的变分方程 为了解除边界条件对基函数选择的限制, 将上述 Rayleigh 商的泛函作适当的扩展, 构成修正的变分方程. 为抵消式 (5.30) 分子中第一项或第二项的回线积分, 对 E_z (1st B.C.) 和 H_z (2nd B.C.), 可在式 (5.29) 中分别添加回线积分²

$$-\oint_{C[S]} \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n_c} \, dl \quad \text{或} \quad \oint_{C[S]} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n_c} \, dl$$

对满足相应齐次边界条件的 ψ , 增加的这两项取零值, 并不影响其最小泛函值的驻定性质.

²添加项的变分分别为

$$-\oint_{C[S]} \left[\delta\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n_c} + \psi \frac{\partial \delta\psi^*}{\partial n_c} \right] dl = -\oint_{C[S]} \delta\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n_c} \, dl \quad (1st \text{ B.C.})$$

$$\oint_{C[S]} \left[\delta\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n_c} + \psi^* \frac{\partial \delta\psi}{\partial n_c} \right] dl = \oint_{C[S]} \delta\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n_c} \, dl \quad (2nd \text{ B.C.})$$

从而 TM 模 E_z 的扩展泛函的变分方程为:

$$\gamma^2 = \frac{\iint_S [|\nabla_{\perp}^2 \psi|^2 - \omega^2 \varepsilon \mu |\psi|^2] ds - \oint_{C[S]} \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n_c} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n_c} \right] dl}{\iint_S |\psi|^2 ds} = \min \quad (5.31a)$$

$$\delta \gamma^2 = \frac{- \oint_{C[S]} \left[\psi^* \frac{\partial \delta \psi}{\partial n_c} + \psi \frac{\partial \delta \psi^*}{\partial n_c} \right] dl}{\iint_S |\psi|^2 ds} = 0 \quad (5.31b)$$

与直接 Ritz 法比, 扩展泛函的好处是免去了对基函数满足边界条件的要求。

同样地, H_z 的扩展泛函变分为

$$\gamma^2 = \frac{\iint_S [|\nabla_{\perp}^2 \psi|^2 - \omega^2 \varepsilon \mu |\psi|^2] ds}{\iint_S |\psi|^2 ds} = \min \quad (5.32a)$$

$$\delta \gamma^2 = \frac{\oint_{C[S]} \left[\delta \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n_c} + \delta \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n_c} \right] dl}{\iint_S |\psi|^2 ds} = 0 \quad (5.32b)$$

此条件下对 $\frac{\partial \delta \psi}{\partial n_c}$ 无边界条件限制. 注意对 2nd B.C. 的 (5.32a) 式是自然成立的, “扩展”是相应 1st B.C. 而言.

II. 几种特殊情况的变分原理

截止角频率的变分方程 截止角频率 ω_c 是区分传播模 ($\omega > \omega_c$, γ 为纯虚数) 与衰减模 ($\omega < \omega_c$, γ 为纯实数) 的临界角频率:

$$\omega = \omega_c \text{ 时 } \gamma = 0$$

故 (5.28) 式中的方程改写成:

$$[\nabla_{\perp}^2 + \omega_c^2 \varepsilon \mu] \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (\mathbf{r} \in S) \quad (5.33)$$

改记线性正算子 $\mathbf{A} = -\nabla_{\perp}^2$, 正定算子 $\mathbf{B} = \varepsilon \mu \mathbf{I}$, 本征值 $\lambda = \omega_c^2$, 则上式为 $\mathbf{A}\psi = \lambda \mathbf{B}\psi$, 其广义 Rayleigh 商变分方程为

$$\omega_c^2 = \frac{\iint_S |\nabla_{\perp} \psi|^2 ds - \oint_{C[S]} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n_c} dl}{\iint_S \varepsilon \mu |\psi|^2 ds} = \min \quad (5.34)$$

其扩展泛函变分方程为:

$$E_z: \quad \omega_c^2 = \frac{\iint_S |\nabla_{\perp} \psi|^2 ds - \oint_{C[S]} \left[\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n_c} + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n_c} \right] dl}{\iint_S \varepsilon \mu |\psi|^2 ds} = \min \quad (5.35a)$$

$$H_z: \quad \omega_c^2 = \frac{\iint_S |\nabla_{\perp} \psi|^2 ds}{\iint_S \varepsilon \mu |\psi|^2 ds} = \min \quad (5.35b)$$

(5.35a), (5.35b) 式对构成近似解的基函数序列无边界条件的限制.

对均匀媒质的简单情况下, 有

$$\gamma^2 = (\omega_c^2 - \omega^2) \varepsilon \mu \quad (5.36)$$

5.4.2 细天线输入阻抗的变分解

任意形状的点馈细天线如图 5.2 所示, 取其轴线作为弯曲柱面坐标系 (ρ, ψ, l) 的主轴, 主轴在直角坐标系中的曲线方程为:

$$L: \begin{cases} x = x_L(l) \\ y = y_L(l) \\ z = z_L(l) \end{cases} \quad l \in [-l_1, l_2] \quad (5.37)$$

馈点 $O_L(x_L(0), y_L(0), z_L(0))$ 处有空隙 $\Delta: l \in [-\delta/2, \delta/2]$, 末端坐标 $l = -l_1$ 和 $l = l_2$, 或是振子天线的开路点, 或是环形天线的连续点 ($-l_1 = l_2$).

细天线模型的条件是 $a \ll l_1, l_2, \lambda$, 从而电流在横截面的周界上均匀分布, 且沿轴线 \hat{l} 方向: $\mathbf{J}(a, \psi, l) = \hat{l} J(l)$, 辐射特性在平均意义上等价于集中在轴线 L 上的电流: $\mathbf{I}(l) = 2\pi a \hat{l} J(l)$. 点馈的条件是空隙远小于所有的几何线度 $\delta \ll a$.

记天线轴 L 上源点坐标 $\mathbf{r}'(x'_L, y'_L, z'_L)$, 对应曲柱坐标为 $(0, 0, l')$, 天线表面 S 上场点矢量 $\mathbf{r}_s(x_s, y_s, z_s)$, 对应曲柱坐标为 (a, ψ, l) . 与源场点间距为

$$R = |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x_s - x'_L)^2 + (y_s - y'_L)^2 + (z_s - z'_L)^2} \quad (5.38)$$

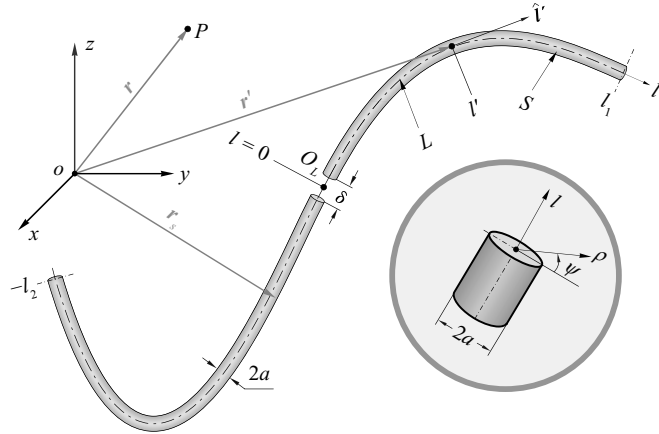


图 5.2 任意形状点馈细天线

根据天线的源分布

$$\begin{cases} \text{电流强度} & \mathbf{I}(l') = \hat{l}' I(l') \\ \text{线电荷密度} & \sigma(l') = \frac{-1}{j\omega} \frac{dI(l')}{dl'} \end{cases} \quad (5.39)$$

通过位函数的 Helmholtz 辐射积分公式

$$\begin{cases} \text{矢量磁位} & \mathbf{A}(\mathbf{r}_s) = \mu \int_L \mathbf{I}(l') G(\mathbf{r}_s | \mathbf{r}') dl' \\ \text{标量磁位} & \Phi(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{\varepsilon} \int_L \sigma(l') G(\mathbf{r}_s | \mathbf{r}') dl' \end{cases} \quad (5.40)$$

其中 Green 函数具有对称性

$$G(\mathbf{r}_s | \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi R} e^{-jkR} = G(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_s) \quad (5.41)$$

在 Lorentz (洛伦兹) 规范 $\Phi(\mathbf{r}_s) = \frac{j}{\omega\mu\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_s)$ 下, 电磁场强为

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}_s) = -j\omega\mathbf{A}(\mathbf{r}_s) - \nabla\Phi(\mathbf{r}_s) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_s) \end{cases} \quad (5.42)$$

以上各式中 \mathbf{r}_s 若换成空间中任意场点 \mathbf{r} , 则由 $\mathbf{I}(l')$ 可直接计算辐射场. 若 $\mathbf{I}(l')$ 未知, 可根据表面边界条件:

$$\begin{cases} [\mathbf{E}(\mathbf{r}_s) + \mathbf{E}^{\text{in}}(\mathbf{r}_s)] \cdot \hat{l} = 0 \\ \hat{\rho} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}_s) = \mathbf{J}(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{2\pi a} \hat{l} I(l) \end{cases} \quad (5.43)$$

建立 $\mathbf{I}(l')$ 的积分方程, 结合式 (5.38)~(5.43) 作为计算该天线辐射的起点. (5.43) 式中外加激励场由点馈条件确定:

$$\mathbf{E}^{\text{in}}(\mathbf{r}_s) \cdot \hat{l} = E_l^{\text{in}}(\mathbf{r}_s) = \begin{cases} V_{\text{in}}/\delta & (l \in \Delta) \\ 0 & (l \in L - \Delta) \end{cases} \quad (5.44)$$

$E_l^{\text{in}}(\mathbf{r}_s)$ 表示激励处 (\mathbf{r}_s) 表面激励场强在 \hat{l} 方向的分量. 式 V_{in} 为馈点输入电压. 当 $\Delta \rightarrow 0$ 时,

$$E_l^{\text{in}}(\mathbf{r}_s) = V_{\text{in}}\delta(l) = \begin{cases} V_{\text{in}} & (l = 0) \\ 0 & (l \neq 0) \end{cases} \quad (5.45)$$

微分—积分方程和变分原理 将 (5.40) 代入 (5.42) 得未知电流 $I(l')$ 的微分—积分方程

$$E_l^{\text{in}}(\mathbf{r}_s) = j\omega\mu \left[\left(1 + \frac{1}{k^2} \right) \nabla \nabla \int_L \mathbf{I}(l') G(\mathbf{r}_s | \mathbf{r}') dl' \right] \cdot \hat{\mathbf{l}} \quad (5.46)$$

式中 ∇ 对场点运算, \int_L 是对源点标量 l' , 故利用性质

$$\nabla [I(l') G(\mathbf{r}_s | \mathbf{r}')] = G(\mathbf{r}_s | \mathbf{r}') \nabla I(l') + I(l') \nabla G(\mathbf{r}_s | \mathbf{r}')$$

注意到 $\nabla I(l') \equiv 0$, 并记自由空间电场并矢格林函数

$$\overline{\overline{\mathbf{G}}}_{e0}(\mathbf{r}_s | \mathbf{r}') = j\omega\mu \left[\overline{\overline{\mathbf{I}}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right] G(\mathbf{r}_s | \mathbf{r}') = \overline{\overline{\mathbf{G}}}_{e0}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_s) \quad (5.47)$$

则上式可改写为第一类 Fredholm 积分方程

$$E^{\text{in}}(\mathbf{r}_s) = \int_L I(l') \left[\hat{\mathbf{l}}' \cdot \overline{\overline{\mathbf{G}}}_{e0}(\mathbf{r}_s | \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{l}} \right] dl' \quad (5.48)$$

式中方括号里的算子只具有对称性而无共轭对称, 不是线性正算子, 从而不能用线性正算子的确定性方程方法建立对应的变分方程. 但可改用 $I(l)$ 作对称内积

$$\int_{\Delta} I(l) E_l^{\text{in}}(\mathbf{r}_s) dl = \int_{L-\Delta} \int_{L-\Delta} I(l') \cdot \overline{\overline{\mathbf{G}}}_{e0}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_s) \cdot I(l) dl' dl$$

在理想点馈 ($\Delta \rightarrow 0$) 时

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{\Delta} I(l) E_l^{\text{in}}(\mathbf{r}_s) dl = V_{\text{in}} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{\Delta} I(l) \delta(l) dl = V_{\text{in}} I(0) = Z_{\text{in}} [I(0)]^2$$

故输入阻抗的泛函式为

$$Z_{\text{in}} = \frac{1}{[I(0)]^2} \int_L \int_L I(l') \cdot \overline{\overline{\mathbf{G}}}_{e0}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_s) \cdot I(l) dl' dl \quad (5.49)$$

可证明

$$\delta Z_{\text{in}} \{I(l)\} = 0 \quad (5.50)$$

从而用 Ritz 可求出电流分布 $I(l)$ 及输入阻抗 $Z_{\text{in}}(0)$.

5.5 加权余量法

算子方程边值问题可概括为:

$$\begin{cases} \mathbf{A}U(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = 0 & \mathbf{r} \in v \\ \mathbf{b}_i U(\mathbf{r}_{b_i}) - g_i(\mathbf{r}_{b_i}) = 0 & \mathbf{r}_{b_i} \in S_i \\ i = 1, 2, \dots, \quad \sum_i S_i = S[v] \end{cases} \quad (5.51)$$

当 $f(\mathbf{r})$ 是已知函数时为确定性问题, $f(\mathbf{r}) = \lambda \mathbf{B}U(\mathbf{r})$ 是广义本征值问题. \mathbf{b}_i 表示第 i 类的边界条件算子.

定义 定义方程和边界条件的余量为

$$\begin{cases} R_e(\mathbf{r}) = \mathbf{A}U^{[n]}(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \\ R_{b_i}(\mathbf{r}_{b_i}) = \mathbf{b}_i U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_i}) - g_i(\mathbf{r}_{b_i}) \end{cases} \quad (5.52)$$

准确解的所有余量恒等于 0. 近似解的余量应在平均意义下为零. 但在大范围取平均不足以限制实际的最大误差, 于是提出加权平均余量. 其基本公式为:

$$\langle R_e, w_\mu \rangle_v + \sum_i \langle R_{b_i}, \mathbf{P}_i w_\mu \rangle_{S_i} = 0 \quad (5.53)$$

式中 $\{w_\mu(\mathbf{r})\} (\mu = 1, 2, \dots)$ 为算子的值域 D'_A 中选取的线性无关函数的完备序列, 又称权函数序列, \mathbf{P}_i 为 w_μ 边界值的变换算子.

若近似解满足边界条件而不满足方程, 即 $\{R_{b_i} \equiv 0; R_e \neq 0\}$, 则式 (5.53) 化为

$$\langle \mathbf{A}U^{[n]}, w_\mu \rangle_v = \langle f, w_\mu \rangle_v \quad (5.54)$$

这是内域积分形式的加权余量法, 又称**矩量法**.

若近似解满足方程而不满足边界条件, 即 $\{R_e \equiv 0; R_{b_i} \neq 0\}$, 则式 (5.53) 化为

$$\sum_i \langle \mathbf{b}_i U^{[n]}, \mathbf{P}_i w_\mu \rangle_{S_i} = \sum_i \langle g_i, \mathbf{P}_i w_\mu \rangle_{S_i} \quad (5.55)$$

这是边界积分形式的加权余量法, 简称**边界积分法**.

例 以 Laplace 边值问题为例,

设近似解 $U^{[n]}(\mathbf{r})$ 和权函数 $w(\mathbf{r})$.

1) 先考虑 Neumann 问题:

$$\begin{cases} -\nabla \nabla U(\mathbf{r}) = 0 & \mathbf{r} \in V \\ \frac{\partial}{\partial n} U(\mathbf{r}_b) = g_2(\mathbf{r}_b) & \mathbf{r}_b \in S[v] \end{cases} \quad (5.56)$$

将近似解 $U^{[n]}$ 代入后写出余量

$$\begin{cases} R_e(\mathbf{r}) = -\nabla \nabla U^{[n]}(\mathbf{r}) \\ R_{b_2}(\mathbf{r}_b) = \frac{\partial}{\partial n} U^{[n]}(\mathbf{r}_b) - g_2(\mathbf{r}_b) \end{cases}$$

令 $\mathbf{P} = \mathbf{I}$, 考虑到 Laplace 问题中的量都是实的, 可省去复共轭号 *, 因此用权函数作内积:

$$\begin{cases} \langle R_e, w \rangle_v = - \iiint_V w \nabla \nabla U^{[n]} dv \\ \langle R_{b_2}, w \rangle_{S[v]} = \oint_{S[v]} w \left(\frac{\partial U^{[n]}}{\partial n} - g_2 \right) ds \end{cases}$$

根据加权余量法的基本公式 (5.53), 可得

$$\iiint_V w \nabla \nabla U^{[n]} dv = \oint_{S[v]} w \left(\frac{\partial U^{[n]}}{\partial n} - g_2 \right) ds \quad (5.57)$$

设 $U^{[n]} = \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v(\mathbf{r})$, φ_v 是 $\mathbf{A} = -\nabla \nabla$ 定义域中线性无关的完备序列函数 (基函数), 且权函数取 n 个不同的函数 (\mathbf{A} 的值域), 则展开系数 $\{c_v\}$ 可由下列线性代数方程组解得:

$$\sum_{v=1}^n c_v \left[\iiint_V w_\mu \nabla \nabla \varphi_v dv - \oint_{S[v]} w_\mu \frac{\partial \varphi_v}{\partial n} ds \right] = - \oint_{S[v]} w_\mu g_2 ds, \quad \mu = 1, 2, \dots, n \quad (5.58)$$

2) 再考虑边界上分片满足第一类和第二类条件的 Robin 问题:

$$\begin{cases} -\nabla \nabla U(\mathbf{r}) = 0 & \mathbf{r} \in v \\ U(\mathbf{r}_{b_1}) = g_1(\mathbf{r}_{b_1}) & \mathbf{r}_{b_1} \in S_1 \\ \frac{\partial}{\partial n} U(\mathbf{r}_{b_2}) = g_2(\mathbf{r}_{b_2}) & \mathbf{r}_{b_2} \in S_2 \end{cases} \quad S_1 + S_2 = S[v] \quad (5.59)$$

令 $\mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$, $\mathbf{P}_1 = -\partial/\partial n = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla$, 则式 (5.59) 的加权余量法公式为

$$\langle R_e, w \rangle_v + \langle R_{b_2}, w \rangle_{S_2} - \left\langle R_{b_1}, \frac{\partial w}{\partial n} \right\rangle_{S_1} = 0$$

即

$$\iiint_V w (\nabla \nabla U^{[n]}) dv = \iint_{S_2} w \left(\frac{\partial U^{[n]}}{\partial n} - g_2 \right) ds - \iint_{S_1} \frac{\partial w}{\partial n} (U^{[n]} - g_1) ds \quad (5.60)$$

若代入 $U^{[n]} = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$ 及取 n 个不同的 $w = w_\mu, \mu = 1, 2, \dots, n$ 则可求得求解 c_i 的线性代数方程组:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n c_\nu \left[\iiint_V w_\mu \nabla \nabla \varphi_\nu dv + \iint_{S_1} \frac{\partial w_\mu}{\partial n} \varphi_\nu ds - \iint_{S_2} w_\mu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial n} ds \right] \\ = \left[\iint_{S_1} \frac{\partial w_\mu}{\partial n} g_1 ds - \iint_{S_2} w_\mu g_2 ds \right], \quad \mu = 1, 2, \dots, n \quad (5.61) \end{aligned}$$

上述 Laplace 边值问题的加权余量法公式可推广到同时含三类边界条件的一般情况, 也可推广到 Poisson 问题和 Helmholtz 本征值问题等, 且对算子无苛刻限制 (即不要一定是自伴的)。

如果余量在每个以权函数为基函数的坐标上的投影都为 0, 则该余量肯定为 0. 但我们的加权余量法是只保证在 n 个基函数 (权函数) 上的投影为 0, 因此所及的解是 n 级近似解 $U^{[n]}(\mathbf{r})$ 。

5.6 矩量法

即内域积分形式的加权余量法, 要求近似解 $U^{[n]}(\mathbf{r})$ 满足边界条件. 对式 (5.51) 的一般边值问题, 应构造 n 级近似解

$$U^{[n]}(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu(\mathbf{r}) \quad (5.62)$$

式中 $\varphi_0(\mathbf{r})$ 应满足边界条件:

$$\mathbf{b}_i \varphi_0(\mathbf{r}_{b_i}) = g_i(\mathbf{r}_{b_i}), \quad \mathbf{r}_{b_i} \in S_i \subset S[v], \quad i = 1, 2, \dots$$

基函数是 D_A 中线性无关的完备序列, 满足

$$\varphi_\nu(\mathbf{r}_{b_i}) \equiv 0, \quad \mathbf{r}_{b_i} \in S_i \subset S[v], \quad i = 1, 2, \dots$$

但当边界条件形状复杂时, 这样的 $\{\varphi_0\}$ 很难找到, 解决办法有三条:

1. 一般加权余量法式 (5.53) 或边界积分法式 (5.55);
2. Ritz 变分法;
3. 矩量法的变种 – 有限元法.

而本节的矩量法是假设可以找到满足所需边界条件的 φ_0, φ_ν , 即近似解满足各项边界条件,

则由 $\langle \mathbf{A}U^{[n]}, w_\mu \rangle_v = \langle f, w_\mu \rangle_v$ 得矩量法的线性代数方程组 (令 $c_0 = 1$):

$$\begin{cases} \text{确定性方程 } \mathbf{A}U = f & \sum_{v=0}^n c_v \langle \mathbf{A}\varphi_v, w_\mu \rangle = \langle f, w_\mu \rangle \\ \text{广义本征方程 } \mathbf{A}U = \lambda \mathbf{B}U & \sum_{v=0}^n c_v \left[\langle \mathbf{A}\varphi_v, w_\mu \rangle - \lambda^{[n]} \langle \mathbf{B}\varphi_v, w_\mu \rangle \right] = 0 \end{cases} \quad \mu = 1, 2, \dots, n \quad (5.63)$$

5.7 边界积分法

边界积分形式的加权余量法, 要求近似解 $U^{[n]}(\mathbf{r})$ 满足算子方程. 但基函数序列的选择存在困难, 故利用方程余量的内积展开式

$$\langle R_e, w \rangle_U = \langle \mathbf{A}U^{[n]}, w \rangle_U - \langle f, w \rangle_U = \langle U^{[n]}, \mathbf{A}^\dagger w \rangle_U - \langle f, w \rangle_U$$

使 $\{\varphi_v | \mathbf{A}\varphi_v = f\}$ 转化为对权函数序列的要求: $\{w_\mu | \mathbf{A}^\dagger w_\mu = 0\}$. 但 \mathbf{A}^\dagger 不知道. 即使是 Lagrange 意义下的自伴算子, 但对并不满足边界条件的 $U^{[n]}$ 和 w (即 $U^{[n]}, w \notin D_b$), 并不具备自伴性 ($\mathbf{A}^\dagger \neq \mathbf{A}$). 解决办法是利用类似证明自伴边值问题的自伴性质时, 用 $U^{[n]}$ 和 w 代替 U 和 W ,

$$\mathbf{A} \langle U^{[n]}, w \rangle_v - \langle U^{[n]}, \mathbf{A}w \rangle_v = \langle \mathbf{b}_1 U^{[n]}, \mathbf{b}_2 w \rangle_{S[v]} - \langle \mathbf{b}_2 U^{[n]}, \mathbf{b}_1 w \rangle_{S[v]}$$

由于对 $U^{[n]}, w$ 非自伴, 等式右边二项之差不为 0, 但可保留在边界积分的加权余量法公式中.

5.7.1 内域基的边界积分法

Poisson 边值问题

$$\begin{cases} -\nabla \nabla U(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in v \\ U(\mathbf{r}_{b_1}) = g_1(\mathbf{r}_{b_1}) & \mathbf{r}_{b_1} \in S_1 \\ \frac{\partial}{\partial n} U(\mathbf{r}_{b_2}) = g_2(\mathbf{r}_{b_2}) & \mathbf{r}_{b_2} \in S_2 \end{cases} \quad S_1 + S_2 = S[v] \quad (5.64)$$

可得类似 (5.60) 的加权余量法公式

$$\iiint_v w (\nabla \nabla U^{[n]}) dv + \iiint_v w f dv = \iint_{S_2} w \left(\frac{\partial U^{[n]}}{\partial n} - g_2 \right) ds - \iint_{S_1} \frac{\partial w}{\partial n} (U^{[n]} - g_1) ds \quad (5.65)$$

利用格林第二定理:

$$\iiint_V \left[w (\nabla \nabla U^{[n]}) - U^{[n]} (\nabla \nabla w) \right] dv = \oiint_{S[v]} \left[w \frac{\partial U^{[n]}}{\partial n} - U^{[n]} \frac{\partial w}{\partial n} \right] ds$$

可得:

$$\begin{aligned} \iiint_V U^{[n]} (\nabla \nabla w) dv + \iiint_V w f dv + \iint_{S_1} w \frac{\partial U^{[n]}}{\partial n} ds + \iint_{S_2} w g_2 ds = \\ \iint_{S_1} \frac{\partial w}{\partial n} g_1 ds + \iint_{S_2} \frac{\partial w}{\partial n} U^{[n]} ds \end{aligned} \quad (5.66)$$

在 \mathbf{A} 的定义域内选 φ_ν , 使 $U^{[n]}(\mathbf{r}) = \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu$; 又选满足 \mathbf{A} 的齐次方程的权函数序列 $w_\mu(\mathbf{r})$, 即 $\mathbf{A}w_\mu = -\nabla \nabla w_\mu = 0$, 则由式 (5.66) 可得边界积分形式的加权余量法公式:

$$\sum_{\nu=1}^n c_\nu \left[\iint_{S_2} \frac{\partial w_\mu}{\partial n} \varphi_\nu ds - \iint_{S_1} w_\mu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial n} ds \right] = \iiint_V w_\mu f dv + \iint_{S_2} w_\mu g_2 ds - \iint_{S_1} \frac{\partial w_\mu}{\partial n} g_1 ds \quad (5.67)$$

Laplace 边值问题 即 Poisson 边值问题式 (5.64) 中 $f(\mathbf{r}) \equiv 0$, 为齐次方程, 其加权余量法公式同式 (5.67), 但体积分项消失. 若 $S_1 = S[v]$, $g_1 = g$, $S_2 = 0$, 取 $w_\mu = \varphi_\mu$, 则式 (5.67) 转化为 Trefftz 法的 (5.19) 式.

Helmholtz 确定性问题 即式 (5.64) 中 $f(\mathbf{r}) \equiv \lambda U(\mathbf{r})$, λ 为已知常数. 加权余量法公式为:

$$\sum_{\nu=1}^n c_\nu \left\{ \left[\iint_{S_2} \frac{\partial w_\mu^*}{\partial n} \varphi_\nu ds - \iint_{S_1} w_\mu^* \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial n} ds \right] - \lambda \iiint_V w_\mu^* \varphi_\nu dv \right\} = \iint_{S_2} w_\mu^* g_2 ds - \iint_{S_1} \frac{\partial w_\mu^*}{\partial n} g_1 ds \quad (5.68)$$

式中“*”是因为 Helmholtz 问题中的量为复数.

Helmholtz 本征值问题 即式 (5.64) 中 $f(\mathbf{r}) \equiv \lambda U(\mathbf{r})$, 具有齐次边界条件: $g_1 = g_2 = 0$, λ 为待定本征值, 从而式 (5.68) 为代数本征值方程

$$\sum_{\nu=1}^n c_\nu \left\{ \left[\iint_{S_2} \frac{\partial w_\mu^*}{\partial n} \varphi_\nu ds - \iint_{S_1} w_\mu^* \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial n} ds \right] - \lambda^{[n]} \iiint_V w_\mu^* \varphi_\nu dv \right\} = 0, \quad \mu = 1, \dots, n \quad (5.69)$$

以上各式中只有含 f 的体积分项, 其余积分都在边界上, 故叫边界积分法. 基函数 $\{\varphi_\nu(\mathbf{r})\}$ 定义在内域 v 上, 故叫内域基的边界积分法.

5.7.2 Green 函数法的应用

Poisson 方程 $-\nabla\nabla U(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$ 在自由空间中对应的格林函数满足

$$\begin{cases} -\nabla\nabla G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \\ G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \\ \frac{\partial G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i)}{\partial n} = \frac{-\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \end{cases} \quad (5.70)$$

选权函数 $w(\mathbf{r}) = G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i)$, 代入式 (5.66), 并利用 δ -函数的取样性质³, 得

$$\begin{aligned} & U^{[n]}(\mathbf{r}_i) - \iiint_V f(\mathbf{r}) G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i) dv \\ & + \iint_{S_2} U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_2}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_i)}{\partial n} ds + \iint_{S_1} g_1(\mathbf{r}_{b_1}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_i)}{\partial n} ds \\ & = \iint_{S_1} \frac{\partial U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_1})}{\partial n} G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_i) ds + \iint_{S_2} g_2(\mathbf{r}_{b_2}) G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_i) ds, \quad \mathbf{r}_i \in v \end{aligned} \quad (5.71a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_\mu}) - \iiint_v f(\mathbf{r}) G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_{b_\mu}) dv \\ & + \iint_{S_2} U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_2}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_{b_\mu})}{\partial n} ds + \iint_{S_1} g_1(\mathbf{r}_{b_1}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_{b_\mu})}{\partial n} ds \\ & = \iint_{S_1} \frac{\partial U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_1})}{\partial n} G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_{b_\mu}) ds + \iint_{S_2} g_2(\mathbf{r}_{b_2}) G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_{b_\mu}) ds, \quad \mathbf{r}_{b_\mu} \in S[v] \end{aligned} \quad (5.71b)$$

$$\begin{aligned} & 0 - \iiint_v f(\mathbf{r}) G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) dv \\ & + \iint_{S_2} U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_2}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_0)}{\partial n} ds + \iint_{S_1} g_1(\mathbf{r}_{b_1}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_0)}{\partial n} ds \\ & = \iint_{S_1} \frac{\partial U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_1})}{\partial n} G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_0) ds + \iint_{S_2} g_2(\mathbf{r}_{b_2}) G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_0) ds, \quad \mathbf{r}_0 \notin v + S[v] \end{aligned} \quad (5.71c)$$

注意式 (5.71a)~(5.71c) 中出现了 $U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_2})$ 及 $\frac{\partial U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_1})}{\partial n}$, 但边界条件给出的是 $U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_1})$ 及 $\frac{\partial U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_2})}{\partial n}$, 因此应根据 (5.71b), (5.71c) 利用下边的边界基积分方程的加权余量法将它们解出, 再代回 (5.71a) 可得 $U^{[n]}(\mathbf{r}_i)$, $\mathbf{r}_i \in v$.

3

$$\iiint_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dv = \begin{cases} 1 & \mathbf{r}_i \in v \\ \frac{1}{2} & \mathbf{r}_i \in S[v] \\ 0 & \mathbf{r}_i \notin v + S[v] \end{cases}$$

对于 Helmholtz 确定性方程 $-(\nabla^2 + k^2) U(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$, 其自由空间中的 Green 函数满足

$$\begin{cases} -(\nabla^2 + k^2) G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \\ G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \\ \frac{\partial G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i)}{\partial n} = \frac{-\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (1 + jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \end{cases} \quad (5.72)$$

可推出类似于式 (5.71a)~(5.71c) 的积分表达式.

5.7.3 边界基的边界积分法

为了求解 $U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_2})$ 及 $\frac{\partial U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_1})}{\partial n}$, 选取边界基函数序列 $\{\psi_\nu(\mathbf{r}_{b_1}) | \nu = 1, 2, \dots, \mathbf{r}_{b_1} \in S_1\}$ 及 $\{\varphi_\nu(\mathbf{r}_{b_2}) | \nu = 1, 2, \dots, \mathbf{r}_{b_2} \in S_2\}$, 构造近似解:

$$\begin{cases} U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_2}) = \sum_{\nu=1}^{n_2} c_\nu \varphi_\nu(\mathbf{r}_{b_2}) & \mathbf{r}_{b_2} \in S_2 \\ \frac{\partial U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_1})}{\partial n} = \sum_{\nu=1}^{n_1} c'_\nu \psi_\nu(\mathbf{r}_{b_1}) & \mathbf{r}_{b_1} \in S_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} n_1 + n_2 = n \\ S_1 + S_2 = S[v] \end{cases} \quad (5.73)$$

代入积分方程 (5.71b) 式, 并在边界上取 n 个样点 $\{\mathbf{r}_{b_\mu} | \mu = 1, 2, \dots, n\}$, 得线性代数方程组:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_\mu}) + \sum_{\nu=1}^{n_2} c_\nu \iint_{S_2} \varphi_\nu(\mathbf{r}_{b_2}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_{b_\mu})}{\partial n} ds - \sum_{\nu=1}^{n_1} c'_\nu \iint_{S_1} \psi_\nu(\mathbf{r}_{b_1}) G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_{b_\mu}) ds \\ & = \iiint_v f(\mathbf{r}) G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_{b_\mu}) dv + \iint_{S_2} g_2(\mathbf{r}_{b_2}) G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_{b_\mu}) ds - \iint_{S_1} g_1(\mathbf{r}_{b_1}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_{b_\mu})}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (5.74)$$

式中

$$U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_\mu}) = \begin{cases} g_1(\mathbf{r}_{b_\mu}) & \mathbf{r}_{b_\mu} \in S_1 \\ \sum_{\nu=1}^{n_2} c_\nu \varphi_\nu(\mathbf{r}_{b_\mu}) & \mathbf{r}_{b_\mu} \in S_2 \end{cases}$$

解出 $\{c_\nu\}$ 和 $\{c'_\nu\}$ 后代入 (5.73) 及 $U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_2})$ 和 $\frac{\partial U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_1})}{\partial n}$, 再代入 (5.71a) 式, 即可算

出 $\mathbf{r}_i \in v$ 点的近似解

$$\begin{aligned}
 U^{[n]}(\mathbf{r}_i) = & \iiint_v f(\mathbf{r}) G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i) dv + \iint_{S_2} g_2(\mathbf{r}_{b_2}) G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_i) ds - \iint_{S_1} g_1(\mathbf{r}_{b_1}) \frac{G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_i)}{\partial n} ds \\
 & - \sum_{v=1}^{n_2} c_v \iint_{S_2} \varphi_v(\mathbf{r}_{b_2}) \frac{G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_i)}{\partial n} ds + \sum_{v=1}^{n_1} c'_v \iint_{S_1} \psi_v(\mathbf{r}_{b_1}) G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_i) ds
 \end{aligned} \tag{5.75}$$

注意要避免 Green 函数在 \mathbf{r}_{b_μ} 处的奇异性. 若采用 (5.71c) 式代替 (5.71b) 式, 则由于 $\mathbf{r}_0 \notin v + S[v]$, 可使 $G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ 不存在奇异性.

显然上述边界基的边界积分法只能逐点计算内域点的近似解, 无法得出近似解的显式, 但较内域基降低一维 (即 $\sum_{v=1}^{n_2}$ 中只有面积分).

5.8 有限元和边界元法

用变分法或矩量法求解具有复杂边界形状的边值问题, 会遇到选取符合第一类齐次边界条件基函数的困难; 在场域内含有非均匀媒质时, 难以写出全域基函数的表达式, 此时宜采用分域基的矩量法或边界积分法. 当各子域节点上的近似解作为线性代数方程组的待求量时 (而不是展开系数 c_v), 分域基的矩量法和边界积分法转化为有限元法和边界元法.

5.8.1 有限元法

可认为是有限差分法与 Ritz 法的结合. 与有限差分法相比, 它的单元划分有很大的随意性, 能较好地适应边界形状; 不仅能得到单元节点上的离散近似解, 还可以写出各单元内的连续近似解. 它与 Ritz 法的主要区别在于: 整个场域内的泛函被分解成各子域内的泛函之和, 泛函驻定的条件直接给出近似解在节点上的取样值而不是展开系数. 这里只简述有限元法的加权余量原理.

划分单元 场域 Ω 划分为 M 个几何结构相同 (但尺寸可以不同) 的单元, 其棱边应尽量贴合实际边界, 在场分布急剧变化处可加密单元. 各单元应小到内含均匀媒质. 每个单元上确定 S 个节点, 编号为 $\{e_v | v = 1, 2, \dots, S\}$. 可只取单元几何结构的顶点 (简单模型), 也可再加上单元棱边上的若干插值点, 甚至个别内点. 节点总数 $N \ll S \times M$. 设内结点 P 个, 编号 $p = 1, 2, \dots, P$. 边界节点 $(N - P)$ 个.

近似解的构成 记未知函数 $U(\mathbf{r})$ 在节点 p (也是单元 e 的第 v 个节点) 上的取样值为 U_p , 也可记为

$$U_{e_v} \in \{U_p | p = 1, 2, \dots, P, \dots, N\}, \quad e = 1, 2, \dots, M; \quad v = 1, 2, \dots, S$$

在单元 e 上用简单函数 (线性插值函数或多项式) 构成近似解:

$$U_e(\mathbf{r}) = \sum_{\mu=1}^S c_{e\mu} \varphi_{e\mu}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \Omega_e \quad (5.76)$$

并扩展到整个场域 Ω , 作为近似解 $U^{[N]}(\mathbf{r})$ 的脉冲分域基函数:

$$U_e(\mathbf{r}) = \begin{cases} \sum_{\mu=1}^S c_{e\mu} \varphi_{e\mu}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \Omega_e \\ 0 & \mathbf{r} \in \Omega - \Omega_e \end{cases} \quad (5.77)$$

在单元 e 的结点 e_v 上, 代入 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{e_v}$, 得:

$$U_e(\mathbf{r}) = \sum_{\mu=1}^S c_{e\mu} \varphi_{e\mu}(\mathbf{r}_{e_v}), \quad v = 1, 2, \dots, S,$$

记矩阵 $[U_{e_v}]_{S \times 1}$, $[C_{e\mu}]_{S \times 1}$, $[\varphi_{e\mu}(\mathbf{r}_{e_v})]_{S \times S}$, 则上式改写为矩阵方程:

$$[U_{e_v}] = [\varphi_{e\mu}(\mathbf{r}_{e_v})][C_{e\mu}], \quad [C_{e\mu}] = [\varphi_{e\mu}(\mathbf{r}_{e_v})]^{-1}[U_{e_v}]$$

写出 Ω_e 的取样矩阵 $[Q_e]_{S \times N}$, 使

$$[U_{e_v}] = [Q_e][U_p], \quad e = 1, 2, \dots, M$$

$$\text{则 } [C_{e\mu}] = [\varphi_{e\mu}(\mathbf{r}_{e_v})]^{-1}[Q_e][U_p]$$

代回 (5.77) 式, 并记列矩阵 $[\varphi_{e\mu}(\mathbf{r})]_{S \times 1}$, 得

$$U_e(\mathbf{r}) = \begin{cases} ([\varphi_{e\mu}(\mathbf{r})]^T [\varphi_{e\mu}(\mathbf{r}_{e_v})]^{-1} [Q_e])[U_p] & \mathbf{r} \in \Omega_e \\ 0 & \mathbf{r} \in \Omega - \Omega_e \end{cases} \quad (5.78)$$

该分域基函数序列合成 Ω 上的 n 级近似解:

$$U^{[n]}(\mathbf{r}) = \sum_{e=1}^M U_e(\mathbf{r}) = [\Phi_p(\mathbf{r})][U_p], \quad \text{其中} \quad (5.79)$$

$$[\Phi_p(\mathbf{r})]_{1 \times N} = \sum_{e=1}^M [\varphi_{e\mu}(\mathbf{r})]^T [\varphi_{e\mu}(\mathbf{r}_{e_v})]^{-1} [Q_e]$$

比较 (5.79) 和 (5.2) 式 (即 $U^{[n]} = \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v(\mathbf{r})$), 若将 $\{\Phi_P(\mathbf{r}) | P = 1, 2, \dots, N\}$ 看作全域基序列, 则 $\{U_p | p = 1, 2, \dots, N\}$ 就是展开系数序列, 于是以前的各种泛函解法 (Ritz 法、Галёркин 法、点配置法等) 都可在 (5.79) 上进行.

5.8.2 矩量法

对一般的权函数 $\Phi : \{R_e, w\}_{\Omega} = 0$, 由 (5.79) 得

$$\mathbf{A}U = f : \sum_{p=1}^N U_p \langle \mathbf{A}\Phi_p, w_q \rangle = \langle f, w_q \rangle, \quad q = 1, 2, \dots \quad (5.80a)$$

$$\text{或 } \mathbf{A}U = \lambda \mathbf{B}U : \sum_{p=1}^N [\mathbf{A}U_p \langle \Phi_p, w_q \rangle - \lambda^{[N]} \langle \mathbf{B}\Phi_p, w_q \rangle] = 0, \quad q = 1, 2, \dots, N \quad (5.80b)$$

对第一类齐次边界条件, 已知边界节点上的零解 $\{U_p \equiv 0 | p = P + 1, \dots, N\}$, 因此近似解 (5.79) 式中只有 P 项, 基 $\{\Phi_p\}$ 、权 $\{w_q\}$ 也只需 P 项, 构成 P 级近似解 $U^{[P]}(\mathbf{r})$.

对于第二类齐次边界条件, 边界上的节点可选为内域节点法向外延的节点, 则这两点应有相等的取样值 ($\because \partial U / \partial n = 0$), 于是未知量 $\{U_p\}$ 也只有 P 项, 构成 P 级近似解. 但 Галёркин 法与变分法等价, 自然边界条件无需满足.

对其他各类边界条件可类似确定未知量 $\{U_p\}$ 及方程 (5.80a), (5.80b) 的独立数. 若各单元有不同媒质, 从而有不同算子, 则 (5.80a), (5.80b) 中的内积 $\langle \mathbf{A}U^{[N]}, w_q \rangle_{\Omega}$ 宜按单元展开成 $\sum_{e=1}^M \langle \mathbf{A}_e U_e, W_q \rangle_{\Omega_e}$, 未知量 U_p 隐含在 $U_e(\mathbf{r})$ 中, 如 (5.78) 式所示.

作为分域基矩量法的变种, 有限元法对复杂边界形状及非均匀媒质适应性强, 在内场问题中广为应用. 但对无界场域的电磁场外场问题, 节点数无穷多, 上述加权余量法无法求解, 可用单矩法.

5.8.3 单矩法 (单边矩量法)

单矩法为有限元法与经典方法的结合, 适于求解无限空间的散射、辐射问题. 在离散射体足够远处散射场分布具有球面波 (三维问题) 或柱面波 (二维问题) 的特点. 作半径为 a 的球面或柱面将场域分为内区和外区. 以二维极坐标 (R, φ) 为例, 在外区, 总场

$$U_{\text{outer}}(\mathbf{R}) = U_{\text{in}}(\mathbf{R}) + U_{\text{sc}}(\mathbf{R}), \quad R \geq a \quad (5.81a)$$

式中 $U_{\text{in}}(\mathbf{R})$ 是外加入射场, 若场源在 (\mathbf{R}', φ') , 则

$$U_{\text{in}}(\mathbf{R}) = \frac{-j}{4} \mathbf{H}_0^{[2]}(k |\mathbf{R} - \mathbf{R}'|), \quad (\text{柱面入射波}) \quad (5.81b)$$

U_{sc} 是散射场, 用柱函数系展开:

$$U_{sc}(\mathbf{R}) = c_0 H_0^{[2]}(kR) + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi] H_n^{[2]}(kR)$$

取其截项构造 $N = 2k + 1$ 级近似解:

$$U_{sc}^{[N]}(\mathbf{R}) = c_0 H_0^{[2]}(kR) + \sum_{n=1}^k [c_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi] H_n^{[2]}(kR) \quad (5.81c)$$

其中含有 N 个待定系数: $\{c_0, c_n, b_n | n = 1, 2, \dots, k\}$, 在内区, 引用有限元法的近似解表达式:

$$U_{inner}(\mathbf{r}) = \sum_{p=1}^N U_p \Phi_p(\mathbf{R}), \quad R \leq a, \quad (5.82)$$

式中 $\{U_p | p = 1, 2, \dots, N\}$ 是近似解在 n 个节点上的取样值, $\{\Phi_p[\mathbf{R}] | p = 1, 2, \dots, N\}$ 是分单元构造(定义)的全域基序列. 在分界面 ($R = a$) 上应有:

$$\begin{cases} U_{outer}(a, \varphi) = U_{inner}(a, \varphi), \\ \frac{\partial}{\partial R} U_{inner}(a, \varphi) = \frac{\partial}{\partial R} U_{inner}(a, \varphi) \end{cases}$$

可在分界面上定义近似解的余量:

$$\begin{cases} R_U(\varphi) = U_{outer}^{[N]}(a, \varphi) - U_{inner}^{[N]}(a, \varphi) \\ R_{dU}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial R} U_{outer}^{[N]}(a, \varphi) - \frac{\partial}{\partial R} U_{inner}^{[N]}(a, \varphi) \end{cases} \quad (5.83)$$

选取正交权函数

$$\{w_m(\varphi) | m = 1, 2, \dots, N\} = \{1; \cos m\varphi, \sin m\varphi | m = 1, 2, \dots, k\}$$

采用加权余量法

$$\begin{cases} \langle R_U, w_m \rangle_{\varphi=0, 2\pi} = 0 \\ \langle R_{dU}, W_m \rangle_{\varphi=0, 2\pi} = 0 \end{cases}, \quad m = 1, 2, \dots, N$$

共 $2N$ 个方程, 可解出 c_0, c_n, b_n 和 U_p , 及出内、外区的 n 级近似解.

含介质散射体内区可作为非均匀媒质的有限元处理(因为内区至少含介质及空气), 在介质表面上应有足够的节点. 含理想导体的内域应挖除导体所占的区域(因为导体内部场强为零), 且由于导体表面为齐次边界条件, 内区(即内、外区界面与导体表面之间的空间)仅 P 个待求

量 U_p , 则外区也应改取 P 级近似解, 且 $P = 2k + 1$, 为奇数.

由于在几何球面或柱面的单侧 (内区) 采用了类似矩量法的加权余量处理, 因此上述方法称为单矩法.

5.8.4 边界元法

为采用边界分域基的边界积分法, 也是内域有限元法用于边界的一种特殊形式.

一般分析 考虑式 (5.64) 的 Poisson 边值问题. m_1 个单元在边界 S_1 上, $m_2 = m - m_1$ 个单元在 S_2 上, 记为 $S_{(e)}$, e 为单元编号. 三维问题取三角形或四边形为边界单元, 二维问题以线段为边界单元. 在每个单元中指定 S 个结点: $\{e_\nu | \nu = 1, 2, \dots, s\}$, 按整个边界统一编号为 $p = 1, \dots, P_1, P_1 + 1, \dots, N$, 其中 P_1 个在 S_1 上, $P_2 = N - P_1$ 个在 S_2 上. 记 $U(\mathbf{r})$ 和 $\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial n}$ 在节点 p 上的取样值为 U_p 和 U'_p , 又记节点 (e_ν) 上取样值为 U_{e_ν} 及 U'_{e_ν} . 写出取样矩阵 $[Q_e]_{S \times P_2}$ 及 $[Q'_e]_{S \times P_1}$, 使

$$\begin{aligned} [U'_{e_\nu}]_{S \times 1} &= [Q'_e]_{S \times P_1} [U'_p]_{P_1 \times 1}, \quad e = 1, 2, \dots, m_1 \\ [U_{e_\nu}]_{S \times 1} &= [Q_e]_{S \times P_2} [U_p]_{P_2 \times 1}, \quad e = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m \end{aligned}$$

选取边界分域基函数:

$$\frac{\partial U_e(\mathbf{r}_{b_1})}{\partial n} = \begin{cases} \sum_{\mu=1}^S c'_{e_\mu} \psi_{e_\mu}(\mathbf{r}_{b_1}), & \mathbf{r}_{b_1} \in S_{(e)} \\ 0, & \mathbf{r}_{b_1} \in S_1 - S_{(e)} \end{cases}, \quad e = 1, 2, \dots, m_1$$

$$\text{及 } U_e(\mathbf{r}_{b_2}) = \begin{cases} \sum_{\mu=1}^S c_{e_\mu} \varphi_{e_\mu}(\mathbf{r}_{b_2}), & \mathbf{r}_{b_2} \in S_{(e)} \\ 0, & \mathbf{r}_{b_2} \in S_2 - S_{(e)} \end{cases}, \quad e = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m$$

可仿照内域有限元法写出边界上的 N 级近似解:

$$\begin{cases} \frac{\partial U^{[N]}(\mathbf{r}_{b_1})}{\partial n} = \sum_{p=1}^{P_1} U'_p \Psi_p(\mathbf{r}_{b_1}) = [\Psi_p(\mathbf{r}_{b_1})][U'_p], & \mathbf{r}_{b_1} \in S_1 \\ U^{[N]}(\mathbf{r}_{b_2}) = \sum_{p=P_1+1}^N U_p \Phi_p(\mathbf{r}_{b_2}) = [\Phi_p(\mathbf{r}_{b_2})][U_p], & \mathbf{r}_{b_2} \in S_2 \end{cases} \quad (5.84)$$

式中

$$\begin{cases} [\Psi_p(\mathbf{r}_{b_1})]_{1 \times P_1} = \sum_{e=1}^{m_1} [\psi_{e\mu}(\mathbf{r}_{b_1})]^T [\psi_{e\mu}(\mathbf{r}_{e_v})]^{-1} [Q'_e] \\ [\Phi_p(\mathbf{r}_{b_2})]_{1 \times P_2} = \sum_{e=m_1+1}^m [\varphi_{e\mu}(\mathbf{r}_{b_2})]^T [\varphi_{e\mu}(\mathbf{r}_{e_v})]^{-1} [Q_e] \end{cases} \quad (5.85)$$

将式 (5.84) 的 N 级近似解代入一般 (内域基) 边界积分法的 (5.71b) 式, 并令取样点 (\mathbf{r}_{b_μ}) 选在节点 $\{\mathbf{r}_q | q = 1, 2, \dots, N\}$ 上, 经整理及代数线性方程组 ($q = 1, 2, \dots, N$):

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{P_1} U'_p \iint_{S_1} \psi_p(\mathbf{r}_{b_1}) G_0(\mathbf{r}_{b_1} | \mathbf{r}_q) ds - \sum_{p=P_1+1}^N U_p \left[\frac{1}{2} \delta_{pq} + \iint_{S_2} \Phi_p(\mathbf{r}_{b_2}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_2} | \mathbf{r}_q)}{\partial n} ds \right] \\ & = \iint_{S_1} g_1(\mathbf{r}_{b_1}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_1} | \mathbf{r}_q)}{\partial n} ds - \iint_{S_2} g_2(\mathbf{r}_{b_2}) G_0(\mathbf{r}_{b_2} | \mathbf{r}_q) ds - \iiint_v f(\mathbf{r}) G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_q) dv \end{aligned} \quad (5.86)$$

据此解出 U'_p 和 U_p , 代入 (5.84) 即得边界近似解 $\frac{\partial U^{[N]}(\mathbf{r}_{b_1})}{\partial n}$ 和 $U^{[N]}(\mathbf{r}_{b_2})$, 再将其代入边界积分法的 (5.71a) 式可计算出内域中任意点 $(\mathbf{r}_i \in U)$ 的 n 级近似解.

5.9 各种泛函解法的关系

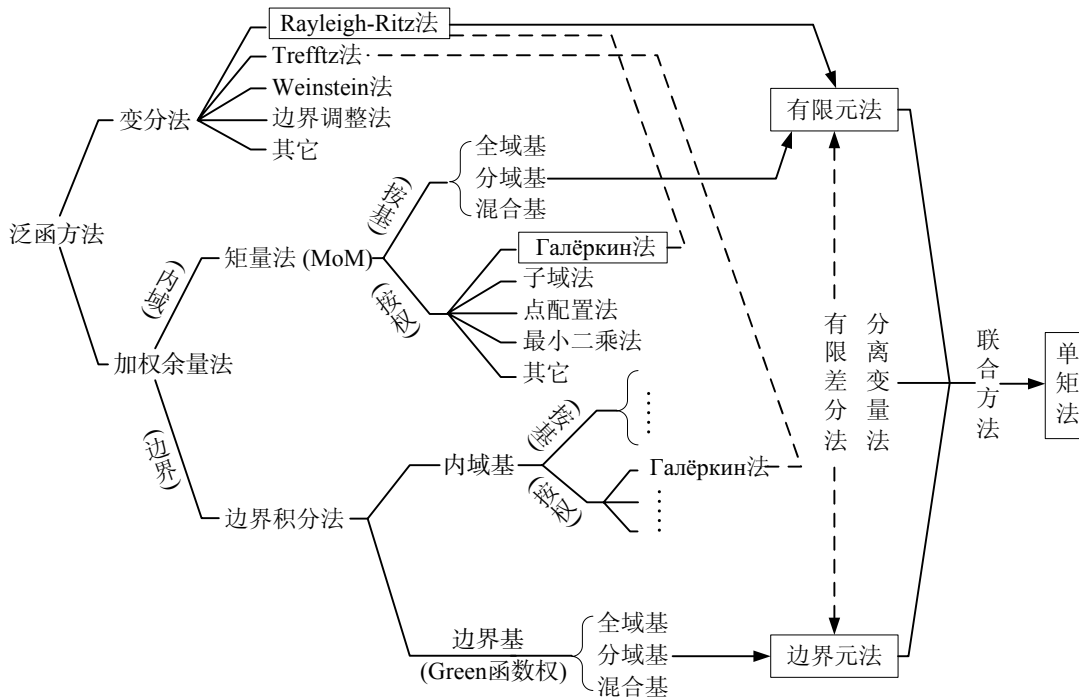


图 5.3 各种泛函解法的关系