

## 第 6 章 矩量法

### 6.1 矩量法的基本原理

矩量法是一种将线性泛函方程离散化为线性矩阵方程的数值技术, 它的基本概念在上世纪初就已经被揭示, 如 1915 年俄国的机械工程师 Галёркин 创立了 Галёркин 法. 但它的正式命名只是在 60 年代末 R.F.Harrington 教授完成的, 它具有基本概念清晰、明了, 处理方法灵活、简易, 适用范围广泛等优点, 倍受电磁领域各国研究人员、学者的青睐, 在这三十余年的历史中已经得到了广泛的应用和长足的进步.

矩量法可以认为是加权余量法的一种特许形式, 即内域积分形式的加权余量法, 要求近似解  $U^{[n]}(\mathbf{r})$  满足边界条件. 从加权余量法的角度, 可以解释如下: 对一般边值问题

$$\begin{cases} \mathbf{A}U(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in v \\ \mathbf{b}_i U(\mathbf{r}_{b_i}) - g_i(\mathbf{r}_{b_i}) = 0, & \mathbf{r}_{b_i} \in S_i \subset S[v] \end{cases} \quad (6.1)$$

应构造  $n$  级近似解

$$U^{[n]}(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu(\mathbf{r}) \quad (6.2)$$

式中  $\varphi_0(\mathbf{r})$  应满足边界条件:  $\mathbf{b}_i \varphi_0(\mathbf{r}_{b_i}) = g_i(\mathbf{r}_{b_i}), \mathbf{r}_{b_i} \in S_i \subset S[v], i = 1, 2, \dots$

基函数则满足:  $\varphi_\nu(\mathbf{r}_{b_i}) \equiv 0, \mathbf{r}_{b_i} \in S_i \subset S[v], i = 1, 2, \dots$

但当边界条件形状复杂时, 这样的  $\varphi_0$  和  $\varphi_\nu$  很难找到, 解决办法有三条:

1. 一般加权余量法或边界积分法;
2. Ritz 变分法;
3. 矩量法的变种 — 有限元法.

具体地, 矩量法的求解可以分为三个过程:

#### 1. 离散化过程

这一过程的目的是将算子方程化为代数方程, 具体步骤为:

- (a) 在算子的定义域内选择一组基函数,  $\{\varphi_\nu | \nu = 1, 2, \dots, N\}$  要求: 线性无关、完备;
- (b) 将未知函数  $U(x)$  表示为该函数的线性组合, 即:

$$U(x) \approx U^{[N]}(x) = \sum_{\nu=1}^N C_\nu \varphi_\nu$$

(c) 将  $U^{[N]}(x)$  的展开式代入算子方程, 利用算子的线性性质, 将算子方程化为代数方程.

$$\text{对于确定性问题 } \mathbf{L}U = f \rightarrow \sum_{\nu=1}^N C_{\nu} \mathbf{L}\varphi_{\nu} = f \quad (6.3)$$

$$\text{对于本征值问题 } \mathbf{A}U = \lambda \mathbf{B}U \rightarrow \sum_{\nu=1}^N C_{\nu} \mathbf{A}\varphi_{\nu} = \lambda \sum_{\nu=1}^N C_{\nu} \mathbf{B}\varphi_{\nu} \quad (6.4)$$

注意: 前提是  $U^{[N]}(x)$  满足各项边界条件.

## 2. 取样检验过程

取样检验的目的是为了使近似解  $U^{[N]}(x)$  与准确解  $U(x)$  之间的误差 (在某种意义下) 极小化, 具体步骤为:

- 在算子  $\mathbf{L}$  的值域内选择一组权函数 (又称检验函数)  $\{w_u | u = 1, 2, \dots, N\}$ , 它们也应该是彼此线性无关的、完备的;
- 将权函数  $w_u$  与离散化的算子方程求内积进行抽样检验, 因为要确定  $n$  个未知数, 需要进行  $n$  次抽样检验;
- 利用算子的线性和内积的性质, 将上述内积检验方程化为矩阵方程, 即

$$\mathbf{L}U = f \rightarrow \sum_{\nu=1}^N C_{\nu} \mathbf{L}\varphi_{\nu} = f \rightarrow \begin{cases} \sum_{\nu=1}^N C_{\nu} \langle \mathbf{L}\varphi_{\nu}, w_u \rangle = \langle f, w_u \rangle, \\ \text{or } \sum_{\nu=1}^N C_{\nu} \langle w_u, \mathbf{L}\varphi_{\nu} \rangle = \langle w_u, f \rangle \end{cases}, \quad u = 1, 2, \dots, N$$

令  $\langle w_u, \mathbf{L}\varphi_{\nu} \rangle = Z_{uv}$ ,  $\langle w_u, f \rangle = V_u$ , 则有  $[Z_{uv}][C_{\nu}] = [V_u]$

更一般地, 可表示为:

$$[Z_{uv}][I_{\nu}] = [V_u] \quad (6.5)$$

式中,  $[Z_{uv}]$  称为广义阻抗矩阵;  $[I_{\nu}]$  称为广义电流矩阵;  $[V_u]$  称为广义电压矩阵.

## 3. 矩阵求解过程

一旦得到矩阵方程, 就可以通过常规的线性方程求解方法得到展开函数的系数, 即:

$$[C_{\nu}] \& [I_{\nu}] = [Z_{uv}]^{-1} [V_u]$$

则

$$U^{[N]} = [\varphi]^T [C_{\nu}]$$

将这一步单独列出的原因在于在矩量法的应用过程中代数方程的求解越来越重要, 它涉及到计算量、解的收敛性、稳定性等众多至关重要的方面, 电磁领域的学者对此越来越关注并作出了重要贡献, 稍后再作解释.

矩量法的具体求解与权函数、基函数的选择密切相关.

### 6.1.1 权函数的选择

根据权函数的不同选择, 可以将矩量法分为几种不同的解法.

#### I. 伽辽金法

令权函数与基函数相同, 即:

$$\{w_u | u=1,2,\dots,N\} = \{\varphi_v | v=1,2,\dots,N\}$$

$$\text{则 } \mathbf{L}U = f \rightarrow \begin{cases} \sum_{v=1}^N I_v \langle \varphi_u, \mathbf{L} \varphi_v \rangle = \langle \varphi_u, f \rangle \\ u = 1, 2, \dots, N \end{cases} \rightarrow [Z_{uv}][I_v] = [V_u]$$

Галёркин 法与 Rayleigh-Ritz 变分法等效;

Галёркин 法适用范围更宽, 直接从算子方程出发, 概念明确, 不需要写出泛函式, 尤其是适用于不能直接建立变分原理的问题;

业已证明, Галёркин 法在全域权中是收敛最快、稳定性最好的方法.

#### 例 解方程

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dx^2}u(x) = 1 + 4x^2 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{解 } u^{[N]}(x) = \sum_{v=1}^N C_v u_v = \sum_{v=1}^N C_v (x - x^{v+1})$$

注意到  $u_v = x - x^{v+1}$  满足 B.C.

$$\mathbf{L}U = f \rightarrow \sum_{v=1}^N C_v \mathbf{L}u_v = f \rightarrow w_u = x - x^{u+1}$$

$$Z_{uv} = \langle w_u, \mathbf{L}u_v \rangle = \int_0^1 (x - x^{u+1}) \left[ -\frac{d^2}{dx^2}(x - x^{v+1}) \right] dx = \frac{uv}{u+v+1}$$

$$V_u = \langle w_u, f \rangle = \int_0^1 (x - x^{u+1})(1 + 4x^2) dx = \frac{u(3u+8)}{2(u+2)(u+4)}$$

$$\text{代入 } [Z_{uv}][C_v] = [V_u]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{N}{N+2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & \cdots & \frac{2N}{N+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{N}{N+2} & \frac{2N}{N+3} & \cdots & \frac{N^2}{2N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \\ \vdots \\ \frac{N(3N+8)}{2(N+2)(N+4)} \end{bmatrix}$$

$$N = 1, \quad u \approx \frac{11}{10}(x - x^2)$$

$$N = 2, \quad u \approx \frac{23}{30}x - \frac{1}{10}x^2 - \frac{2}{3}x^3$$

$$N = 3, \quad u = \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^4$$

$$N \geq 4, \quad u \text{ 同上}$$

## II. 点配置法 (Point-matching method)

将权函数取为指定点  $\{\mathbf{r}_u | u=1,2,\dots,N\}$  处的冲激函数:  $w_\mu(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\mu)$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, n$ , 则对于确定性边值问题:  $\mathbf{L}U = f : \rightarrow \sum_{v=0}^n c_v \varphi_v(\mathbf{r}_\mu) = f(\mathbf{r}_\mu)$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, n$

$$Z_{uv} = \mathbf{L}\varphi_v(\mathbf{r}_u), \quad V_u = f(\mathbf{r}_u)$$

其意义是余量  $\text{res}(\mathbf{r})$  在  $n$  个离散点上等于零:  $\text{res}(\mathbf{r}_\mu) = 0, \mu = 1, 2, \dots, n$  (即  $\sum_{v=0}^n [c_v \varphi_v(\mathbf{r}_\mu)] - f(\mathbf{r}_\mu) = 0$ ), 近似解在这些点上严格地满足方程 (及边界条件), 其他点或区域的误差取决于  $N$  的大小及点的分布情况, 无法直接控制.

点配置法免除了繁复的内积运算, 简单明了, 可以选取较多的点获得较高的精度;

一般情况下, 取样点在区域内等间隔选取;

显然点配置法不宜用于未知函数有锐变点的问题.

对广义本征值问题, 则为

$$U = \lambda U : \quad \sum_{v=0}^n c_v [\varphi_v(\mathbf{r}_\mu) - \lambda^{[n]} \varphi_v(\mathbf{r}_\mu)] = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, n \quad (6.6)$$

**例** 求解金属圆柱体上的电荷分布, 如图 6.1 所示. 假设  $a \ll \lambda$ ; 电荷周向均匀分布, 导体有稳恒电位  $V_0$ .

**noindent 解** 电位与电荷的关系:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{v'} \frac{\rho dv'}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_S ds'}{r} \quad (6.7)$$

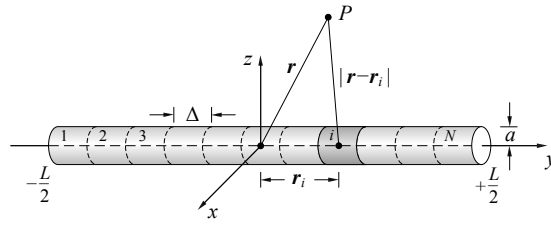


图 6.1 带电金属圆柱体

导体是等位体, 导体表面为等位面, 上式中场点在导体表面时:

$$4\pi\epsilon_0 V_0 = \int_L \frac{\rho(y')}{|y_i - y'|} dy' \quad (6.8)$$

上式可以看作为关于电荷的算子方程,  $\mathbf{L}\rho(y') = 4\pi\epsilon_0 V_0$ . 将整个圆柱体分为  $N$  段, 分别为  $\Delta_i, i = 1, 2, \dots, N$ , 选取矩形基函数

$$\varphi_i = \begin{cases} 1 & y \in \Delta_i \\ 0 & y \notin \Delta_i \end{cases}$$

则 
$$\rho \approx \sum_{i=1}^N \rho_i \varphi_i \quad \rightarrow \quad \sum_i \rho_i \mathbf{L}\varphi_i = 4\pi\epsilon_0 V_0,$$

$$\mathbf{L}\varphi_i = \int_0^{\Delta_i} \frac{dy'}{r} = \frac{\Delta}{|y - y'_i|} \quad \rightarrow \quad \sum_{v=1}^N \frac{\rho_v \Delta}{|y - y'_v|} = 4\pi\epsilon_0 V_0$$

取  $w_i = \delta(y - y_i)$ , 于是有

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 V_0 &= \frac{\rho_1 \Delta}{|y_1 - y'_1|} + \frac{\rho_2 \Delta}{|y_1 - y'_2|} + \dots + \frac{\rho_N \Delta}{|y_1 - y'_N|} \\ 4\pi\epsilon_0 V_0 &= \frac{\rho_1 \Delta}{|y_2 - y'_1|} + \frac{\rho_2 \Delta}{|y_2 - y'_2|} + \dots + \frac{\rho_N \Delta}{|y_2 - y'_N|} \\ &\vdots \\ 4\pi\epsilon_0 V_0 &= \frac{\rho_1 \Delta}{|y_N - y'_1|} + \frac{\rho_2 \Delta}{|y_N - y'_2|} + \dots + \frac{\rho_N \Delta}{|y_N - y'_N|} \end{aligned}$$

或写为广义电压电流矩阵形式

$$[\mathbf{Z}_{ij}][\rho_j] = [\mathbf{V}_j], \quad \mathbf{Z}_{ij} = \frac{\Delta}{|y_i - y_j|}, \quad \mathbf{V}_j = 4\pi\epsilon_0 V_0$$

但是  $i = j$  时广义阻抗矩阵元素趋向于无穷大, 不能用上式. 必须单独处理, 即处理每节上自身电荷的影响. 先求第  $j$  段上电荷均匀分布在表面时中心点的电位:

$$4\pi\epsilon_0 V_0 = \iint_{\Delta s'} \frac{\rho_s ds'}{\sqrt{a^2 + y'^2}} = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{\rho_s 2\pi a dy'}{\sqrt{a^2 + y'^2}} = 2\rho_j \ln \frac{\Delta}{a}$$

式中  $\rho_j = 2\pi a \rho_s$ , 因此  $Z_{jj} = 2 \ln \frac{\Delta}{a}$ . 于是矩阵变为

$$\begin{bmatrix} 2 \ln \frac{\Delta}{a} & \frac{\Delta}{|y_1 - y_2|} & \cdots & \frac{\Delta}{|y_1 - y_N|} \\ \frac{\Delta}{|y_2 - y_1|} & 2 \ln \frac{\Delta}{a} & \cdots & \frac{\Delta}{|y_2 - y_N|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta}{|y_N - y_1|} & \frac{\Delta}{|y_N - y_1|} & \cdots & 2 \ln \frac{\Delta}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_N \end{bmatrix} = 4\pi\epsilon_0 V_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

取  $L = 1\text{m}$ ,  $a = 1\text{mm}$ ,  $V_0 = 1\text{V}$ ,  $N = 25$ , 电荷分布如图 6.2 所示. 若取  $a = 10\text{mm}$ , 矩阵变得病态, 解不稳定.

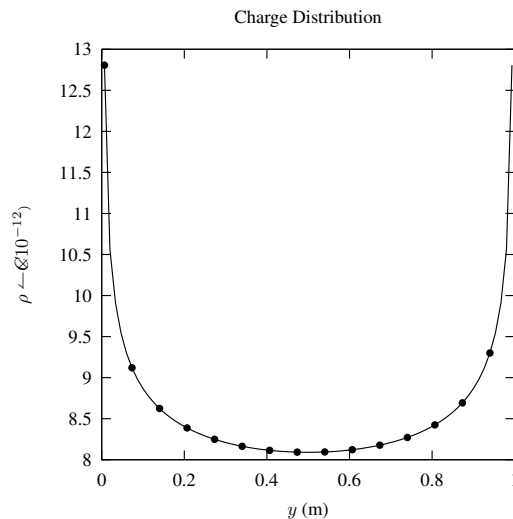


图 6.2 均匀细棒上的电荷分布

### III. 子域法 (Sub-Domain Method)

令权函数为作用于不同子域的矩形脉冲函数序列:

$$w_\mu(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{r} \in \Delta V_\mu \\ 0 & \mathbf{r} \notin \Delta V_\mu \end{cases}, \quad \sum_{\mu=1}^n \Delta V_\mu = V, \quad \mu = 1, 2, \dots, n$$

则确定性算子方程:

$$\mathbf{L}U = f : \sum_{v=0}^n c_v \iiint_{\Delta V_\mu} \mathbf{L}\varphi_v dv = \iiint_{\Delta V_\mu} f dv, \quad \mu = 1, 2, \dots, N$$

广义本征值方程:

$$\mathbf{A}U = \lambda \mathbf{B}U : \sum_{v=0}^n c_v \left[ \iiint_{\Delta V_\mu} \mathbf{A}\varphi_v dv - \lambda^{[n]} \iiint_{\Delta V_\mu} \mathbf{B}\varphi_v dv \right] = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, N,$$

1. 子域法使得原算子方程的余量  $\text{res}(\mathbf{r})$  在每个子域  $V_\mu$  内的算术平均值等于零. 因而必然在每个子域内部余量正负交差, 未必比选点法好;
2. 将内积范围缩小在每个子域内, 而且在子域内权函数为 1, 简化了内积求解过程.

#### IV. 最小二乘法

根据方程的余量随展开系数的变化率选取权函数序列:

$$w_\mu(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}) \frac{\partial \text{res}(\mathbf{r})}{\partial C_\mu}, \quad p(\mathbf{r}) > 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, n \quad (6.9)$$

则加权余量法公式:

$$\langle \text{res}, w_\mu \rangle = \iiint_V p \text{res} \left[ \frac{\partial \text{res}}{\partial C_\mu} \right]^* dv = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, n \quad (6.10)$$

由于  $J\{U^{[n]}\}$  只是  $c_\mu$  的函数, 上式等价于变分方程

$$\delta J\{U^{[n]}\} = \delta \iiint_V p |\text{res}|^2 dv = 0 \quad (6.11)$$

说明余量绝对值平方在  $V$  内按  $p(\mathbf{r})$  的加权积分为最小值, 是控制误差的最有效方法, 称为最小二乘法. 一般取  $p(\mathbf{r}) = 1$ .

将  $\text{res}$  的表达式 (如  $\sum_{v=0}^n c_v \varphi_v - f$ ) 及  $U^{[n]}$  代入, 得:

$$\mathbf{A}U = f : \sum_{v=0}^n c_v \langle \mathbf{A}\varphi_v, p\mathbf{A}\varphi_\mu \rangle = \langle f, p\mathbf{A}\varphi_\mu \rangle, \quad \mu = 1, 2, \dots, n \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}U = \lambda \mathbf{B}U : \sum_{v=0}^n c_v \left[ \langle \mathbf{A}\varphi_v, p\mathbf{A}\varphi_\mu \rangle - \lambda^{[n]} \langle \mathbf{A}\varphi_v, p\mathbf{B}\varphi_\mu \rangle - \lambda^{[n]} \langle \mathbf{B}\varphi_v, p\mathbf{A}\varphi_\mu \rangle \right. \\ \left. + (\lambda^{[n]})^2 \langle \mathbf{B}\varphi_v, p\mathbf{B}\varphi_\mu \rangle \right] = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (6.13)$$

最小二乘法是控制误差的最有效方法; 这种方法虽然精度高, 但计算复杂, 较少采用.

## 6.1.2 基函数的选择

矩量法的概念思路非常简单明了,但要用好矩量法并不容易,关键之一就是基函数的选择.理论上说,可以存在无穷多种基函数,但在实际应用中往往只有少数几组基函数适用于给定问题.同时某些基函数比其他形式的基函数对于给定问题而言收敛更快,也就是说在给定精度下需要的计算量更少.一般来说,基函数越接近待求函数,收敛越快,而且往往随之阻抗矩阵的稳定性也越好.

矩量法的基函数在满足线性无关、完备的条件下,还必须满足与未知函数相同类型的齐次边界条件:

$$\mathbf{b}_i \varphi_v(\mathbf{r}_{b_i}) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \mathbf{r}_{b_i} \in S_i \subset S[v]$$

此外当然还应符合算子、内积所要求的可微性和可积性条件.一般来说,矩量法的基函数可以分为全域基和分域基两大类,与上述权函数结合可以有各种不同的方法.

### I. 全域基函数

全域基是指在算子的定义域内的全域上非零的一组基函数.

如果事先能够了解待求函数的特性,选择符合这种特性的基函数,解的收敛性将会很好.如对称振子天线上的电流分布接近正弦分布,就可以选择正弦函数为基函数.

全域基函数的最大优点是收敛快.

缺点是需要有关未知函数的先验知识,而未知函数的特性是很难事先了解的,而且有时即使知道也很难用一个函数在整个域上进行描述,或者数学形式过于复杂,增加了计算量,这就限制了全域基函数的应用.

几种常用的全域基函数为:

#### 1. Fourier 级数

$$I(x) = I_1 \cos \frac{\pi}{2}x + I_2 \cos \frac{3\pi}{2}x + \dots + I_N \cos \frac{2N-1}{2}\pi x$$

#### 2. Чебышёв 多项式

$$I(x) = I_1 T_1(x) + I_2 T_3(x) + \dots + I_N T_{2N-1}(x)$$

#### 3. Maclaurin 级数

$$I(x) = I_1 + I_2 x^2 + I_3 x^4 \dots + I_N x^{2(N-1)}$$

#### 4. Legendre 多项式

$$I(x) = I_1 P_0(x) + I_2 P_2(x) + \dots + I_N P_{2(N-1)}(x)$$



## II. 分域基函数

分域基函数是定义在算子定义域内,但只在各个子域内不为零,区域的其余部分其值为零的一组线性无关完备序列.

选择分域基函数本质是一种区域离散化过程,未知函数展开成只在各子域存在的分域基函数的线性组合.如前述求解金属圆柱体上电荷分布的例子就是选择了矩形脉冲分域基函数.

即选取脉冲函数序列作为分域基函数序列,其元素  $\varphi_v(\mathbf{r})$  仅在子域  $\Delta V_v$  上取值.与有限元方法类似,也可以选用高阶基函数,如二次或三次插值基函数,可以在不增加未知数数目的情况下提高精度.例如一维边值问题中常用的分域基函数形式有:

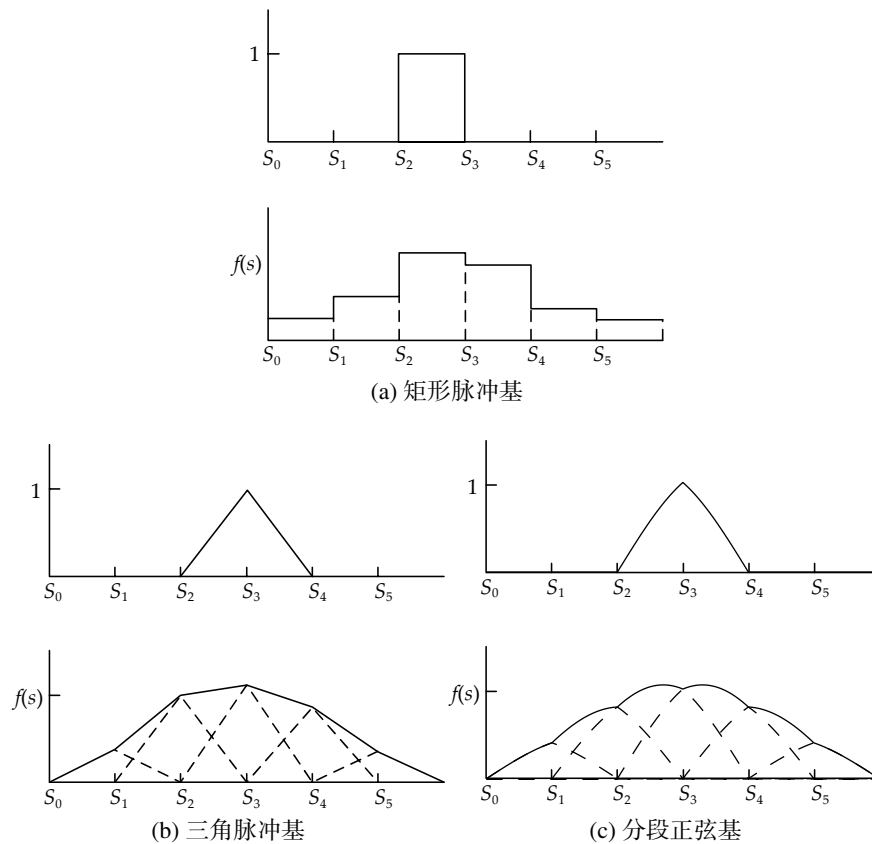


图 6.3 常见一维基函数

### 1. 矩形脉冲基:

$$P_v(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Delta x_v \\ 0 & x \notin \Delta x_v \end{cases}$$

2. 分段线性基 (或三角脉冲基):

$$\Lambda_v(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{v-1}}{x_v - x_{v-1}} & x \in [x_{v-1}, x_v] \\ \frac{x_{v+1} - x}{x_{v+1} - x_v} & x \in [x_v, x_{v+1}] \\ 0 & x \notin [x_{v-1}, x_{v+1}] \end{cases}$$

3. 分段正弦基:

$$S_v(x) = \begin{cases} \frac{\sin[k(x - x_{v-1})]}{\sin[k(x_v - x_{v-1})]} & x \in [x_{v-1}, x_v] \\ \frac{\sin[k(x_{v+1} - x)]}{\sin[k(x_{v+1} - x_v)]} & x \in [x_v, x_{v+1}] \\ 0 & x \notin [x_{v-1}, x_{v+1}] \end{cases}$$

4. 二次插值基:

$$\varphi_v(x) = \begin{cases} A_v + B_v(x - x_v) + C_v(x - x_v)^2 & x \in \Delta x_v \\ 0 & x \notin \Delta x_v \end{cases}$$

5. 正弦插值基:

$$\psi_v(x) = \begin{cases} A_v + B_v \sin k(x - x_v) + C_v \cos k(x - x_v)^2 & x \in \Delta x_v \\ 0 & x \notin \Delta x_v \end{cases}$$

这几类基函数都有各自的特点, 如矩形基:

$$U^{[n]}(x) = \sum_{v=1}^n c_v P_v(x_0) = \begin{cases} c_v & (x = x_v^-) \\ c_{v+1} & (x = x_v^+) \end{cases}$$

近似解在子域邻接点处不连续, 微商有奇异性. 而对于三角脉冲基、分段正弦基和二次插值基: 构成的近似解在全域上连续, 但其微商在子域的端点不连续, 二阶微商有奇异性. 如在  $x_{v-1}^-$  处微商小于零, 而在  $x_{v-1}^+$  处微商大于零 (正弦基时为 1).

优点: 简单、灵活、不受未知函数特性的约束;

缺点: 收敛慢、欲得到全域基一样的精度, 需要更多的分段数目, 使得矩阵阶数增大.

近几年分域基函数得到了进一步的发展, 出现了收敛速度快、适应性强的分域基函数形式, 如多路分支结构等.

### III. 二维基函数

**一阶基函数** 若求解区域是一个表面, 它可以被划分为小的三角形区域. 在某些特殊情况下也可划分为小矩形区域. 然而, 普遍来说, 三角形网格划分在表示特定表面形状时, 具有更高的灵活性和精度. 与脉冲基类似, 可以得到表面上的一阶基函数, 即在节点处为 1, 并线性地在相邻节点处下降到 0. 如图 6.4 所示.

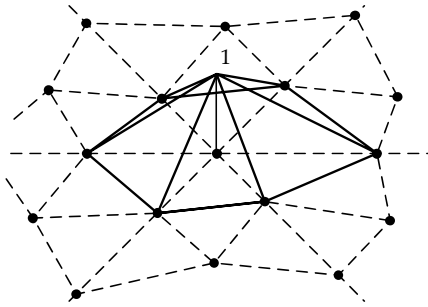


图 6.4 表面上的一阶基函数

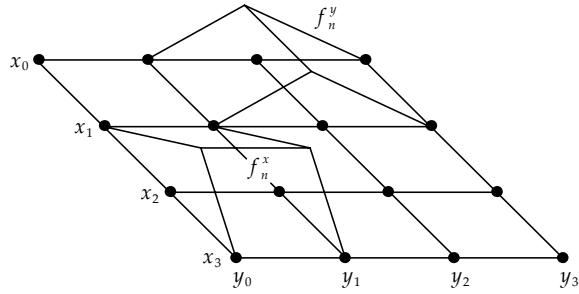


图 6.5 屋顶基函数

**屋顶基函数** 在多数三维问题中, 积分方程的未知函数是表面电流密度, 是一个矢量. 对于这样的未知数, 基函数选择必须根据电流密度的性质加以选择. 一种常用的基函数被称为**屋顶基函数**. 对于  $x - y$  平面上的一个矩形网格, 对于表面电流的  $x$  和  $y$  分量的基函数分别定义为

$$f_n^x = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_{j-1} \leq y \leq y_j \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (6.14a)$$

$$f_n^y = \begin{cases} \frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j \\ \frac{y_{i+1} - y}{y_{i+1} - y_i}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_j \leq y \leq y_{j+1} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (6.14b)$$

易见屋顶函数实际上是一个脉冲基函数和三角基函数的乘积:  $f_n^x = \Lambda_i(x)P_j(y)$ ,  $f_n^y = P_i(x)\Lambda_j(y)$ . 屋顶基函数如图 6.5 所示. 它可以保证电流的连续性, 并保证边界条件近似满足.

**RWG 屋顶基函数** 若表面划分为三角形网格, 可以使用 RWG 屋顶基函数 [42] 来展开表面电流. 此函数定义为具有公共边  $l_n$  的相连的两个三角形:

$$f_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{l_n}{2A_n^+} \boldsymbol{\rho}_n^+ & \mathbf{r} \in T_n^+ \\ \frac{l_n}{2A_n^-} \boldsymbol{\rho}_n^- & \mathbf{r} \in T_n^- \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (6.15)$$

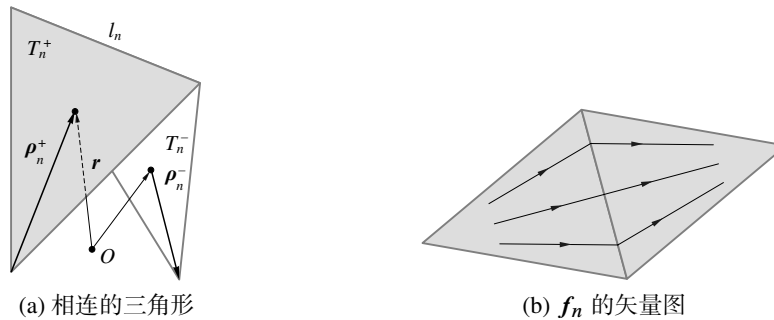


图 6.6 RWG 矢量基

其中,  $T_n^\pm$  代表与第  $n$  号边相连的两个三角形,  $A_n^\pm$  是三角形  $T_n^\pm$  的面积,  $l_n$  是第  $n$  条边的长度,  $\boldsymbol{\rho}_n^\pm$  是如图 6.6a 所示的由  $T_n^+$  自由顶点指向  $\mathbf{r}$ , 或由  $\mathbf{r}$  指向  $T_n^-$  自由顶点的矢量.  $f_n(\mathbf{r})$  的矢量图如图 6.6b 所示.

RWG 矢量基使用时需要注意的最重要的特性是, 其边  $l_n$  的法向分量是常数 (被归一化), 而其它边的法向分量都为 0. 这一特性保证在所有边上, 电流都连续分布.

### 6.1.3 矩量法中的若干问题

计算时间  $t$

$$t = AN^2 + BN^3 + CN^2N_i + DNN_iN_a \quad (6.16)$$

其中  $N$  为未知量数目;  $N_a$  为观察点 (场点) 数目.  $N_i$  是依赖于待求物体几何形状、激励源数目的常数.  $A, B, C, D$  是取决于计算方法、计算机类型的常数.

可见, 为了节省计算时间, 最有效的途径是减少  $N$  (实际上就是矩阵的大小).

**解的收敛性** 与基函数、权函数的选择有关, 选择合适, 可以用较少的展开项数得到较高的精度.

**解的稳定性** 对于矩阵方程:  $[C_v] \ \& \ [I_v] = [Z_{uv}]^{-1} [V_u]$ ,

当  $[Z]$  为奇异矩阵时,  $[Z]^{-1}$  不存在, 因而解也不存在.

但当  $[Z]$  接近奇异矩阵时, 解不稳定, 这种矩阵称为病态矩阵.

在二维的情况下:

奇异矩阵: 意味着两条线平行, 因而无解;

病态矩阵: 意味着两条线夹角接近零, 不大的舍入误差会引起解的大范围变动, 解不稳定, 结果不可信;

良态矩阵: 意味着两条线正交或大夹角, 解对舍入误差不敏感, 解稳定.

例 良态矩阵

$$\begin{cases} 300x + 400y = 700 \\ 100x + 100y = 200 \end{cases} \xrightarrow{\text{微扰}} \begin{cases} 303x + 400y = 700 \\ 101x + 100y = 200 \end{cases}$$

解为:  $x = 1, y = 1$                       解为:  $x = 0.99, y = 1$

病态矩阵

$$\begin{cases} 300x + 400y = 700 \\ 100x + 133y = 233 \end{cases} \xrightarrow{\text{微扰}} \begin{cases} 300x + 400y = 700 \\ 100x + 133y = 232 \end{cases}$$

解为:  $x = 1, y = 1$                       解为:  $x = -3, y = 4$

## 6.2 近似算子和扩展算子

在矩量法的实际应用中, 有时算子很复杂, 对于所选择的基函数  $\varphi_v$  和权函数  $w_u$ , 内积运算十分复杂, 而且对于复杂算子, 在其定义域内有时很难找到合适的基函数.

解决途径: 通过改变算子, 即采用近似算子、扩展算子代替原来的算子, 从而简化计算, 并且同样能够得到原来算子方程的矩量法解.

### 6.2.1 近似算子

没有一个统一的方法, 只是根据算子的具体情况进行近似, 目的是简化. 比较常规的方法有:

微分: 有限差分

积分: 有限求和或近似积分核代替实际积分核

例

$$\begin{cases} -\frac{d^2U}{dx^2} = 1 + 4x^2 \\ U(0) = U(1) = 0 \end{cases}$$

将区域  $[0, 1]$  分为  $N + 1$  段, 除了区域端点外, 有  $N$  个段点.

a) 选择分域基、子域权, 即

三角基:

$$T(x) = \begin{cases} 1 - |x|(N + 1) & |x| < \frac{1}{N + 1} \\ 0 & |x| > \frac{1}{N + 1} \end{cases}$$

脉冲权:

$$w_u = \begin{cases} 1 & |x - x_u| \leq \frac{1}{2(N+1)} \\ 0 & |x - x_u| > \frac{1}{2(N+1)} \end{cases}$$

则  $[Z_{uv}][I_v] = [V_u]$  中

$$Z_{uv} = \begin{cases} 2(N+1) & u = v \\ -(N+1) & |u - v| = 1 \\ 0 & |u - v| > 1 \end{cases}, \quad V_u = \frac{1}{N+1} \left[ 1 + \frac{4u^2 + \frac{1}{3}}{(N+1)^2} \right]$$

但此时不能用脉冲基,因为它不在算子  $\mathbf{L} = -d^2/dx^2$  的定义域内,选用三角基后也不能用点选配,因为  $\mathbf{L}T(x)$  中出现符号函数  $\delta(x)$ .

b) 用近似算子的方法

有限差分代替微分:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left[ u(x + \frac{\Delta x}{2}) - u(x - \frac{\Delta x}{2}) \right] \quad (6.17)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2} \{u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x)\} \quad (6.18)$$

其中  $\Delta x = 1/(N+1)$ , 原来的算子方程就成为

$$\mathbf{L}^d u(x) = (N+1)^2 [-u(x + \Delta x) + 2u(x) + u(x - \Delta x)] = 1 + 4x^2 \quad (6.19)$$

选取脉冲基函数和冲激函数权(点选配), 即:

$$\varphi_v = \begin{cases} 1 & |x - x_v| \leq \frac{1}{2(N+1)} \\ 0 & |x - x_v| > \frac{1}{2(N+1)} \end{cases}, \quad w_u(x) = \delta(x - x_u), \quad x_u = \frac{u}{N+1}$$

则:  $[Z_{uv}][I_v] = [V_u]$  中

$$Z_{uv} = \langle \mathbf{L}^d \varphi_v, w_u \rangle = \begin{cases} 2(N+1)^2 & u = v \\ -(N+1)^2 & |u - v| = 1 \\ 0 & |u - v| > 1 \end{cases}, \quad V_u = 1 + 4 \left( \frac{u}{N+1} \right)^2$$

结论:

1. 原来不能用的脉冲基和点选配, 可以用了, 扩大了基函数和权函数选择范围, 对于复杂问题十分重要;
2. 与前面的分域基比较,  $Z_{uv}$  完全相同 (方程左右同时扩大了  $(N + 1)$  倍,  $V_u$  有微小的差别, 但当  $N$  很大时, 也非常接近.

## 6.2.2 扩展算子

一个算子是由一种运算加上一个定义域来确定的, 对于复杂算子, 除了上面所说的近似算子外, 还可以用扩展算子来处理.

在原来的算子的基础上, 构造一种新的运算, 对原来的算子加以扩展, 使得不在原来算子定义域的某些函数在新的算子的定义域内, 从而使原来不能成为基函数的某些函数对于新的算子可以作为基函数. 这种重新构造的运算及其定义域称为原来算子的扩展算子.

★ 注意:

- 1) 扩展算子不得改变原来算子在其定义域内的运算;
- 2) 原来算子是自伴的, 扩展算子也必须是自伴的.

构造扩展算子有二种常用的方式:

- 1) 将原来的算子的定义域加以扩展而不改变未知函数的边界条件. 基函数的选择可以在扩展算子的定义域中进行且满足边界条件;
- 2) 将原来算子作用下未知函数的边界条件加以扩展, 扩展为扩展算子作用下的未知函数的边界条件. 基函数的选择可以不必满足原来算子作用下的未知函数的边界条件而满足扩展算子作用下未知函数的边界条件.

下面以实例予以说明.

**例 1** 对于算子  $\mathbf{L} = -\frac{d^2}{dx^2}, [0, 1]$

$$\langle \mathbf{L}f, U \rangle = \int_0^1 -U(x) \frac{d^2 f}{dx^2} dx = \int_0^1 \frac{dU}{dx} \cdot \frac{df}{dx} dx - U(x) \frac{df}{dx} \Big|_0^1$$

对于选择  $U(0) = U(1) = 0$  的函数, 则可以定义扩展算子  $\mathbf{L}^e$  为:

$$\langle \mathbf{L}^e f, U(x) \rangle = \int_0^1 \frac{dU}{dx} \cdot \frac{df}{dx} dx$$

显然

- 1)  $\mathbf{L}^e$  没有改变  $\mathbf{L}$  在定义域中的运算;
- 2)  $\mathbf{L}$  要求二阶导函数存在, 而  $\mathbf{L}^e$  只需要一阶导函数存在. 放宽了对基函数选择的限制, 如此

时可以选择脉冲函数为基函数.

$$\varphi_v = P(x - x_v) = \begin{cases} 1 & |x - x_v| \leq \frac{1}{2(N+1)} \\ 0 & |x - x_v| > \frac{1}{2(N+1)} \end{cases}$$

$$w_u = T(x - x_u) = \begin{cases} 1 - (N+1)|x - x_u| & |x - x_u| \leq \frac{1}{(N+1)} \\ 0 & |x - x_u| > \frac{1}{(N+1)} \end{cases}$$

得到

$$Z_{uv} = \begin{cases} 2(N+1) & u = v \\ -(N+1) & |u - v| = 1 \\ 0 & |u - v| > 1 \end{cases}, \quad V_u = \frac{1}{N+1} \left[ 1 + \frac{4u^2 + \frac{2}{3}}{(N+1)^2} \right]$$

可见与原来的结论  $Z$  矩阵完全相同,  $V$  向量有微小的差别, 但当  $N$  趋向于无穷时也趋向于一致.

**例 2** 在前述  $\langle \mathbf{L}f, U \rangle$  中, 如不满足边界条件, 将出现边界项, 可以定义  $\mathbf{L}^e$  为:

$$\langle \mathbf{L}^e f(x), U(x) \rangle = \int_0^1 U(x) \mathbf{L}f(x) dx - \left[ f(x) \frac{dU(x)}{dx} \right]_0^1$$

注意: 此时即使不满足边界条件,  $\mathbf{L}^e$  也时自伴的, 即  $\langle \mathbf{L}^e f, U \rangle = \langle f, \mathbf{L}^e U \rangle$ .

此时基函数不必满足边界条件, 如全域基、Галёркин 法:  $\varphi_v(x) = x^v, w_u(x) = x^u$ , 则:

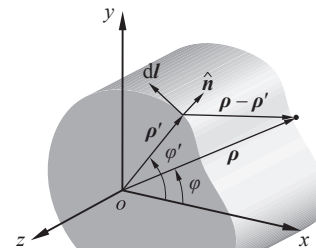
$$Z_{uv} = \int_0^1 x^u \left[ -\frac{d^2(x^v)}{dx^2} \right] dx - \left[ x^v \frac{d(x^u)}{dx} \right]_0^1 = \frac{u + v - uv - u^2 v^2}{u + v + 1}$$

$$V_u = \langle 1 + 4x^2, w_u \rangle = \int_0^1 (4x^2 + 1)x^u dx = \frac{5u + 7}{(u + 1)(u + 3)}$$

当  $N \geq 4$  时, 同样得到精确解:  $U(x) = \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^4$ .

### 6.3 二维散射场的矩量法解

考虑一任意截面的无限长柱形导体, 当外界电磁波照射该导体时, 在导体表面会激励起感应电流, 该感应电流又会产生散射场. 当外界入射场只有轴向电场时, 产生 TM 场, 反之, 只有轴向磁场时产生 TE 场, 任何电磁场可以表示为一个 TM 场和一个 TE 场之和, 即:



<http://www.jlao.net/emnotes>

图 6.7 柱体及坐标系



1) 对 TM 场:  $E_z, H_\rho, H_\varphi$

2) 对 TE 场:  $H_z, E_\rho, E_\varphi$

### 6.3.1 二维电磁场的 Green 函数

无源区域的 Maxwell 方程为:

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} \end{cases}$$

对于 TM 场:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = j\omega\varepsilon E_z \\ -j\omega\mu H_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \\ -j\omega\mu H_\varphi = -\frac{\partial E_z}{\partial \rho} \end{cases}$$

设 TM 场是由放置在原点的沿  $z$  向的轴向线电流产生的, 强度为  $I$ , 由于对称性,  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ , 所以:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\varphi) = j\omega\varepsilon E_z \\ j\omega\mu H_\varphi = \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) + (k\rho)^2 E_z = 0 \quad (6.20)$$

上式为零阶 Bessel 方程, 其解为 Bessel 函数、Neumann 函数或者 Hankel 函数, 由辐射条件

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left( \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + jk E_z \right) = 0$$

其解应该为第二类 Hankel 函数, 即  $E_z = C H_0^{(2)}(k\rho)$ , 式中  $C$  待定常数. 又注意到  $H_0^{(2)'}(x) = -H_1^{(2)}(x)$ , 于是

$$H_\varphi = \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = \frac{C}{j\omega\mu_0} \frac{H_0^{(2)}(k\rho)}{\partial \rho} = -\frac{Ck}{j\omega\mu_0} H_1^{(2)}(k\rho)$$

由安培环路定律,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

于是

$$H_\varphi = \frac{1}{2\pi\rho} I \quad (6.21)$$

当  $k\rho \ll 1$  时, 由 Hankel 函数的小宗量近似,

$$H_1^{(2)}(k\rho) \approx j \frac{2}{\pi k\rho}$$

式 (6.21) 变为

$$-\frac{Ck}{j\omega\mu_0} j \frac{2}{\pi k \rho} = \frac{1}{2\pi\rho} I$$

故

$$C = -\frac{I}{4}\omega\mu_0 = -\frac{k\eta I}{4}$$

于是

$$E_z = -\frac{k\eta}{4} I H_0^{(2)}(k\rho) \quad (6.22)$$

对于放在空间任意位置的单位源, 有:

$$G_e = -\frac{k\eta}{4} H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|)$$

有了 Green 函数, 就可以写出 TM 场的一般表达式

$$E_z = -\frac{k\eta}{4} \int_{l'} J_{sz}(\rho') H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) dl' \quad (6.23)$$

或

$$E_z = -\frac{k\eta}{4} \iint_{S'} J_{vz}(\rho') H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) ds' \quad (6.24)$$

对于二维 TE 场, 同样可以导出 Green 函数为:

$$G_m = -\frac{k}{4\eta} H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) \quad (6.25)$$

与 TM 场不同, 此时源分布是等效磁流源  $M_z$ .

### 6.3.2 导体柱体 TM 场的矩量法解

现在考虑一种外加电场  $E_z^i$  照射柱体的情况.

#### I. 等效原理

由等效原理, 一激励源附近存在一个理想导体时空间总的电磁场等于导体不存在时的激励场加上感应电流产生的散射场, 即:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s$$

而且总的电磁场满足 Maxwell 方程及各类边界条件.

## II. 电积分方程 (EFIE)

对于 TM 场而言, 在导体表面  $E_z|_C = (E_z^i + E_z^s)|_C = 0$ . 对于  $J_z$  而言, 有:

$$E_z^s|_C = -\frac{k\eta}{4} \int_C J_z(\rho') H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) dl', \quad \rho' \in C, \rho \in C$$

所以

$$E_z^i|_C = \frac{k\eta}{4} \int_C J_z(\rho') H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) dl', \quad \rho' \in C, \rho \in C \quad (6.26)$$

这就是关于  $J_z$  的积分方程, 写成算子方程的形式为:

$$\mathbf{L}J_z = E_z^i$$

其中

$$\mathbf{L} = \frac{k\eta}{4} \int_C H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) dl'$$

## III. 矩量法解

令  $J_z = \sum_{n=1}^N C_n J_n$ , 将导体分成  $n$  段, 选取脉冲基函数:

$$J_n = \begin{cases} 1, & \rho \in \Delta C_n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

采用点配置法, 即  $w_m = \delta(x - x_m, y - y_m)$

$$\begin{aligned} Z_{mn} &= \langle w_m, \mathbf{L}J_n \rangle = \int_C \delta(x - x_m, y - y_m) dl \left\{ \frac{k\eta}{4} \int_{\Delta C_n} H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) dl' \right\} \\ &= \frac{k\eta}{4} \int_{\Delta C_n} H_0^{(2)} \left[ k \sqrt{(x_m - x')^2 + (y_m - y')^2} \right] dl' \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$V_m = \langle w_m, E_z^i \rangle = E_z^i(x_m, y_m) \quad (6.28)$$

形式解

$$J_z = [J_n]^T [C_n] = [J_n]^T [Z_{mn}]^{-1} [V_m] \quad (6.29)$$

在广义阻抗矩阵元素的积分中, 由于 Hankel 函数的存在而不存在解析解, 最粗糙但最直接的近似为认为每一个分段很小, 而且在分段上均匀分布, 即:

$$m \neq n \text{ 时, } Z_{mn} = \frac{k\eta}{4} \Delta C_n H_0^{(2)} \left[ k \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2} \right]$$

但  $m = n$  时, Hankel 函数有一个可去奇点, 因此必须以解析近似来计算积分.

首先将每一个分段以一段直线代替, 其次同样地认为分段很小, 则:

$$x \ll 1 \text{ 时, } H_0^{(2)}(x) \approx 1 - j\frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma x}{2}\right), \quad \gamma = 1.781078 \dots \quad (\text{Euler Number})$$

于是

$$\begin{aligned} Z_{mn} &= \frac{k\eta}{4} \int_{\Delta C_n} \left\{ 1 - j\frac{2}{\pi} \ln \left[ \frac{\gamma k}{2} \sqrt{(x_n - x')^2 + (y_n - y')^2} \right] \right\} dl' \\ &\approx \frac{k\eta}{4} \int_{\Delta C_n} \left\{ 1 - j\frac{2}{\pi} \ln \left[ \frac{\gamma k}{2} |\alpha| \right] \right\} d\alpha \\ &\approx \frac{k\eta}{4} \Delta C_n \left\{ 1 - j\frac{2}{\pi} \ln \left[ \frac{\gamma k}{4e} \Delta C_n \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.30)$$

上述积分中计及了:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0, \quad \int \ln x dx = x \ln x - x$$

在上述系数矩阵  $Z_{mn}$  的积分中, 更精确的措施是:  $Z_{mn}$  ( $m \neq n$ ) 中被积函数泰勒展开, 取主项积分, 或将矩形脉冲改为分段线性基等.

#### IV. 散射场计算

在计算得出电流分布后即可计算散射场

$$\begin{aligned} E_z^s &\approx -\frac{k\eta}{4} \sum_n C_n \int_{\Delta C_n} H_0^{(2)} \left[ k \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \right] dl' \\ &\approx -\frac{k\eta}{4} \sum_n C_n \Delta C_n H_0^{(2)} \left[ k \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} \right] \\ &= -\frac{k\eta}{4} \sum_n C_n \Delta C_n H_0^{(2)}(k |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n|) \end{aligned} \quad (6.31)$$

上式适用于近区场和远区场,  $(x, y)$  或  $\boldsymbol{\rho}$  是场点坐标.

对于远区场,  $x \gg 1$ ,

$$H_0^{(2)'}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-jx + j\frac{\pi}{4}}$$

故

$$H_0^{(2)}(k |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n|) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n|}} e^{-jk |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n| + j\frac{\pi}{4}}$$

在远区场的振幅中,  $|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n| \approx \rho$ . 在远区场的相位中,  $|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n| \approx \rho - \boldsymbol{\rho}_n \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}$ . 所以

$$H_0^{(2)}(k |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n|) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k \rho}} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-jk \rho} e^{jk(x_n \cos \varphi + y_n \sin \varphi)} \quad (6.32)$$

$$E_z^s \approx k\eta \sqrt{\frac{1}{8\pi k\rho}} e^{-j(k\rho + \frac{3\pi}{4})} \sum_n C_n \Delta C_n e^{jk(x_n \cos\varphi + y_n \sin\varphi)} \quad (6.33)$$

令

$$[V_n^s] = \begin{bmatrix} \Delta C_1 e^{jk(x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi)} \\ \vdots \\ \Delta C_N e^{jk(x_N \cos\varphi + y_N \sin\varphi)} \end{bmatrix}$$

于是有近似

$$E_z^s \approx k\eta \sqrt{\frac{1}{8\pi k\rho}} e^{-j(k\rho + \frac{3\pi}{4})} [V_n^s]^T [Y_{mn}] [V_m^i] \quad (6.34)$$

式中,  $[V_n^s]$  为测量矩阵或接收矩阵,  $[V_m^i]$  为激励矩阵,  $[Y_{mn}] = [Z_{mn}]^{-1}$  为广义导纳矩阵.

### 6.3.3 应用实例

#### I. 平面波照射时的散射截面

当入射波为  $z$  向极化的均匀平面波时, 入射场为:

$$\mathbf{E}^i = E_z^i \hat{\mathbf{a}}_z = \hat{\mathbf{a}}_z e^{-j\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}}$$

式中,  $\mathbf{k} = -k \cos\varphi^i \hat{\mathbf{a}}_x - k \sin\varphi^i \hat{\mathbf{a}}_y$ ,  $\boldsymbol{\rho} = x \hat{\mathbf{a}}_x + y \hat{\mathbf{a}}_y$ , 故

$$E_z^i = e^{-jk(x \cos\varphi^i + y \sin\varphi^i)}$$

定义散射截面  $\sigma$ , 为这样一个宽度 (在三维问题中为面积), 当它上面的入射波携带的功率再全向辐射时, 足以在给定方向产生相同的散射功率密度, 即:

$$\sigma(\varphi) = 2\pi\rho \left| \frac{E^s(\varphi)}{E^i} \right|^2 \rightarrow |E^s(\varphi)|^2 = \frac{|E^i|^2}{2\pi\rho} \sigma(\varphi)$$

$E^s(\varphi)$  为  $J_z$  产生的远区场.

设入射场振幅为 1, 即  $|E_z^i|^2 = E_z^i \cdot E_z^{i*} = 1$ , 有

$$\sigma(\varphi^i, \varphi^s) = 2\pi\rho |E^s(\varphi^s)|^2 = \frac{k\eta^2}{4} |[V_m^s][Y_{mn}][V_m^i]|^2 \quad (6.35)$$

其中  $\varphi^i$  为入射角,  $\varphi^s$  为散射角.

当  $\varphi^i = \varphi^s$  时,  $\sigma$  表示发射与接收在同一方向上的散射截面, 称为**后向散射截面**;

当  $\varphi^i \neq \varphi^s$  时,  $\sigma$  表示发射与接收在不同方向上的散射截面, 称为**前向散射截面**.

图 6.8 显示了平面 TM 波照射在半径  $r = \frac{\lambda}{2}$  的导电圆柱体上时的表面电流分布的幅度和相位.

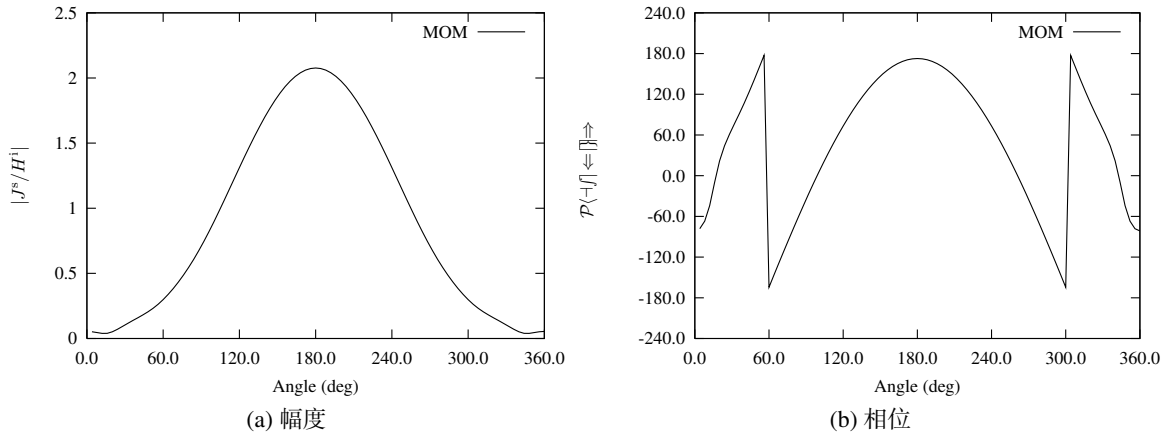


图 6.8 表面电流分布

## II. 缝隙辐射

设在一无限长均匀截面的理想导体柱壁上有一个纵向缝隙, 则在导体表面电场切向分量为零而磁场切向分量不为零, 存在有面电流分布; 而在缝隙开口同时存在电、磁场切向分量, 存在等效面电流和等效面磁流, 故问题可等效为存在面电流的封闭导体和一片存在于缝隙位置的等效面磁流, 缝隙的辐射场可以看作是由等效面磁流激励时导体的散射场, 即:

$$\mathbf{M}^s = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}$$

假设已知口面的  $z$  向极化电场分布为:

$$E_z^i = \cos(ks)$$

$s$  是从开口中心处逆时针度量的口面轮廓长度, 则:

$$V_m^i = \begin{cases} \cos(ks_m) & s_m \in \text{Slot} \\ 0 & \text{others} \end{cases} \quad (6.36)$$

辐射场为:

$$E_z^s = -\frac{j\omega\mu e^{-jk\rho}}{\sqrt{8\pi jk\rho}} [V_n^s]^T [Y_{mn}] [V_m^i] \quad (6.37)$$

## 6.4 线形天线中的矩量法解

### 6.4.1 线天线的积分方程

#### I. Pocklington 方程

线天线长度为  $L$ , 半径为  $a$ , 且  $L \gg a$ ,  $a \ll \lambda$ , 在柱坐标下略去径向电流和周向电流, 且轴向电流随周向也无变化, 故可以用轴线上电流  $I$  来代替  $z$  方向的电流, 即:  $\mathbf{J} \rightarrow J_z$ ,  $I(z) = 2\pi a J_z$ , 即  $\mathbf{J}$  只有  $J_z$  分量,  $\mathbf{A}$  只有  $A_z$  分量, 仅仅考虑导体表面上切向电场时也只需要考虑  $E_z$  分量, 故:

$$\begin{cases} E_z^s = -j\omega A_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial z} = -j\omega \mu \varepsilon \varphi \end{cases} \quad (6.38)$$

于是有

$$E_z^s = \frac{1}{j\omega \mu \varepsilon} \left[ \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z \right] \quad (6.39)$$

将滞后位表达式代入上式, 得:

$$E_z^s = \frac{1}{j\omega \varepsilon} \iiint_{v'} \left( \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + k^2 G \right) J_z dv' \quad (6.40)$$

因为电流位于轴线上,  $E_z$  在圆柱表面, 所以  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}$ , 则

$$G(z, z') = \frac{e^{-jk\sqrt{a^2 + (z - z')^2}}}{4\pi\sqrt{a^2 + (z - z')^2}} \quad (6.41)$$

$$E_z^s = \frac{1}{j\omega \varepsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[ \frac{\partial^2 G(z, z')}{\partial z^2} + k^2 G(z, z') \right] I(z') dz' \quad (6.42)$$

在导体表面, 边界条件为:  $(E_z^i + E_z^s) = 0$ , 于是得到 **Pocklington 方程**:

$$E_z^i = \frac{j}{\omega \varepsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[ \frac{\partial^2 G(z, z')}{\partial z^2} + k^2 G(z, z') \right] I(z') dz' \quad (6.43)$$

写成算子方程形式则为:

$$\mathbf{L}[I(z')] = E_z^i, \quad \text{其中} \quad \mathbf{L} = \frac{j}{\omega \varepsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[ \frac{\partial^2 G(z, z')}{\partial z^2} + k^2 G(z, z') \right] dz' \quad (6.44)$$

Pocklington 方程的优点在于不受  $E_z^i$  形式的限制 (相对于 Hällén 方程而言).

## II. Hällén 方程

在导体表面

$$\frac{d^2 A_z}{dz^2} + k^2 A_z = -j\omega\mu\varepsilon E_z^i \quad (6.45)$$

若在馈电处接入一个冲激电压 (理想情况, 为极薄片电压的理想化), 即

$$E_z^i = V\delta(z) = \begin{cases} V & z = 0 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

则

$$\frac{d^2 A_z}{dz^2} + k^2 A_z = -j\omega\mu\varepsilon V\delta(z)$$

其解为齐次方程通解与非齐次方程特解之和

$$\frac{d^2 A_z}{dz^2} + k^2 A_z = 0 \quad \rightarrow \quad A'_z = B \cos kz \quad (6.46)$$

$$\frac{d^2 G}{dz^2} + k^2 G = -4\pi V\delta(z) \quad \rightarrow \quad G = -\frac{2\pi j}{k} e^{-jk|z|} \quad (6.47)$$

所以  $A_z$  的特解为

$$A'' = \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{V}{2} e^{-jk|z|} \quad (6.48)$$

则通解为

$$A = \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{V}{2} e^{-jk|z|} + B \cos kz$$

于是得到于 **Hällén 方程**:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} I(z') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dz' = \frac{1}{\eta} \frac{V}{2} e^{-jk|z|} + C \cos kz \quad (6.49a)$$

或

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} I(z') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dz' = -\frac{j}{\eta} \frac{V}{2} \sin k|z| + C' \cos kz \quad (6.49b)$$

式中  $R = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}$ .

Hällén 方程用途较窄, 因为它限定了入射场是与冲激电压成正比.



## 6.4.2 矩量法解

### I. Pocklington 方程

令  $r = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}$ , 则有

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r^5} [(1 + jkr)(2r^2 - 3a^2) - k^2 r^2 (z - z')^2] \quad (6.50)$$

Pocklington 方程化为

$$E_z^i = \frac{j}{4\pi\omega\varepsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I(z') G_1(z, z') dz' \quad (6.51)$$

式中,

$$G_1(z, z') = \frac{e^{-jkr}}{r^5} [(1 + jkr)(2r^2 - 3a^2) + k^2 a^2 r^2]$$

在 Pocklington 方程的求解中, 充分体现了矩量法解中基函数与权函数选择的重要性, 事实上, 如用脉冲函数和点选配很难获得正确解 (主要是积分核函数随  $z'$  变化太快:  $\sim r^{-5}$ ). 一般地, 可用整域余弦函数展开, 收敛较快, 即:

$$\tilde{I}(z') = \sum_{n=1}^N I_n \cos \frac{(2n-1)\pi z'}{2}, \quad -\frac{L}{2} \leq z' \leq \frac{L}{2} \quad (6.52)$$

注意,  $\tilde{I}(z')$  满足端点边界条件, 若用点选配, 则:

$$w_m(z) = \delta(z - z_m) \quad (6.53a)$$

$$\begin{aligned} Z_{mn} &= \langle w_m, \mathbf{L}\varphi_n \rangle = \frac{j}{4\pi\omega\varepsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \delta(z - z_m) dz \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} G_1(z, z') \cos \frac{(2n-1)\pi z'}{L} dz' \\ &= \frac{j}{4\pi\omega\varepsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} G_1(z_m, z') \cos \frac{(2n-1)\pi z'}{L} dz' \end{aligned} \quad (6.53b)$$

$$V_m = \langle w_m, E_z^i \rangle = E_z^i(z_m) \quad (6.53c)$$

形式解为

$$[I_n] = [Z_{mn}]^{-1} [V_m]$$

由于考虑了振子的半径,  $Z_{mn}$  的积分中不存在奇点.

### II. Hällén 方程

Hällén 方程的矩量法解可以用分域基也可以用全域基, 但必须注意, 等式右边包含了一个未知量, 权函数必须比基函数数目多一个.

假设  $V = 1$ , Hällén 方程重写为:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} I(z')G(z, z') dz' = -\frac{j}{2\eta} \sin k|z| + C \cos kz \quad (6.54)$$

其中

$$G(z, z') = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}, \quad r = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}, \quad C \text{ 未知}$$

1. 采用脉冲基、点选配

$$\varphi_n(z') = \begin{cases} 1 & z' \in \Delta z_n \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

则  $I(z') \approx \sum_{n=1}^N C_n \varphi_n(z')$ ,  $N$  为分段单元数.

权函数:  $w_m(z) = \delta(z - z_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots, (N + 1)$ , 则

$$Z_{mn} = \langle w_m, \mathbf{L}\varphi_n \rangle = \int_{\Delta z_n} G(z_m, z') dz' \quad (6.55a)$$

$$V_m = \langle w_m, f(z) \rangle = f(z_m) = C \cos kz_m - \frac{j}{2\eta} \sin kz_m \quad (6.55b)$$

可得矩阵方程为:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{1N} & \cdots & \cos kz_1 \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{2N} & \cdots & \cos kz_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & Z_{NN} & \cdots & \cos kz_N \\ Z_{(N+1)1} & Z_{(N+1)2} & Z_{(N+1)N} & \cdots & \cos kz_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \\ C_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \\ \vdots \\ V'_N \\ V'_{N+1} \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

式中  $V'_m = -j\frac{1}{2\eta} \sin kz_m$ .

匹配点可选在每一段的中点, 并在合适的地方增加一点, 如整个天线的中点. 则

$$z = -\frac{l}{2}, -\frac{l}{2} + \Delta z, \dots, 0, \dots, \frac{l}{2} - \Delta z, \frac{l}{2}$$

求  $Z_{mn}$  的积分可以用解析方法加以近似. 由于

$$\frac{e^{-jkr_m}}{r_m} = \Re + j\Im = \frac{\cos kr_m}{r_m} - j\frac{\sin kr_m}{r_m}$$

其中虚部是  $z'$  的光滑函数, 直接利用矩形积分近似, 有

$$\int_{z_n - \frac{\Delta z}{2}}^{z_n + \frac{\Delta z}{2}} \Im(z') dz' \approx -\frac{\Delta z \sin k [a^2 + (z_m - z_n)^2]^{\frac{1}{2}}}{[a^2 + (z_m - z_n)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (6.57)$$

这一近似在  $\Delta z < 0.05\lambda$  时都是比较准确的. 而实部在  $z' \rightarrow z_m$  时变化较大, 所以

$$\begin{aligned} \int_{z_n - \frac{\Delta z}{2}}^{z_n + \frac{\Delta z}{2}} \Re(z') dz' &= \int_{z_n - \frac{\Delta z}{2}}^{z_n + \frac{\Delta z}{2}} \frac{\cos k [a^2 + (z_m - z_n)^2]^{\frac{1}{2}}}{[a^2 + (z_m - z_n)^2]^{\frac{1}{2}}} dz' \\ &\approx \cos k [a^2 + (z_m - z_n)^2]^{\frac{1}{2}} \int_{z_n - \frac{\Delta z}{2}}^{z_n + \frac{\Delta z}{2}} \frac{dz'}{[a^2 + (z_m - z_n)^2]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \cos k [a^2 + (z_m - z_n)^2]^{\frac{1}{2}} \ln \left[ \frac{z_m + \Delta z/2 - z_n + [a^2 + (z_m - z_n + \Delta z/2)^2]^{\frac{1}{2}}}{z_m - \Delta z/2 - z_n + [a^2 + (z_m - z_n - \Delta z/2)^2]^{\frac{1}{2}}} \right] \end{aligned} \quad (6.58)$$

故

$$\begin{aligned} Z_{mn} \approx \frac{1}{4\pi} \cos k [a^2 + (z_m - z_n)^2]^{\frac{1}{2}} \ln \left[ \frac{z_m + \Delta z/2 - z_n + [a^2 + (z_m - z_n + \Delta z/2)^2]^{\frac{1}{2}}}{z_m - \Delta z/2 - z_n + [a^2 + (z_m - z_n - \Delta z/2)^2]^{\frac{1}{2}}} \right] \\ - j \frac{\Delta z \sin k [a^2 + (z_m - z_n)^2]^{\frac{1}{2}}}{4\pi [a^2 + (z_m - z_n)^2]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (6.59)$$

图 6.9 是利用上述分域基方法计算半波振子和全波振子电流分布的算例.

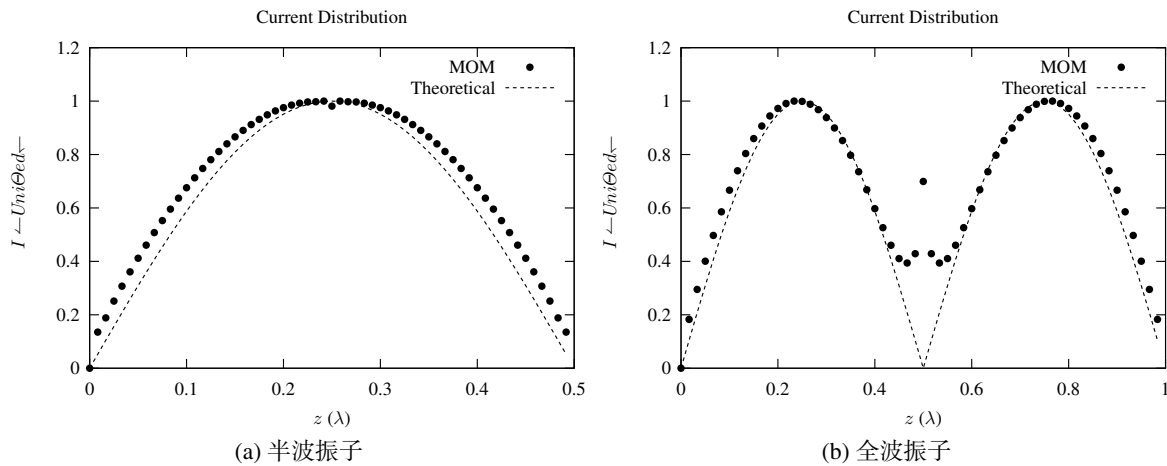


图 6.9 对称振子的矩量法解

## 2. 采用全域基、点选配

$$\varphi_n(z') = \sin \left[ \frac{n\pi}{2L}(L - z') \right], \quad w_m(z) = \delta(z - z_m)$$

$z_m$  可选为均匀分布, 注意比基函数多一个, 如  $z_m = \frac{2m-1}{2N+1}L, m = 1, 2, \dots, N, N+1$ . 则

$$Z_{mn} = \langle w_m, \mathbf{L}\varphi_n \rangle = \int_0^L G(z_m, z') \sin \frac{(L - z')n\pi}{2L} dz' \quad (6.60)$$

所得矩阵方程形式与前面相同.

### 两种方法的比较

**分域基:** 每一个积分形式简单, 只需要在每一个分段上进行, 但项数多;

**全域基:** 收敛快, 所需要的展开项数少, 但每一个积分都必须在整个区间进行.

一般全域基只需要 2 ~ 3 项就可以, 而分域基 20 ~ 30 段也很正常, 视  $L$  的大小而定.

### 6.4.3 线形天线阵列的矩量法解

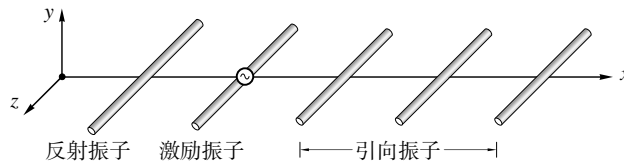


图 6.10 八木天线

以八木天线为例, 如图 6.10 所示, 由一根反射振子、一根有源振子和若干根引向振子组成, 此时在所有这些导体表面, Pocklington 方程仍然有效, 对于整个阵列是分域基对于每一个振子是全域基

$$I = \sum_{q=1}^{D+2} \sum_{n=1}^N I_{nq} \cos(2n-1) \frac{\pi z'}{L}$$

设在每一个单元上电流都用  $n$  个基函数展开, 则矩阵方程形式为:

$$\sum_{q=1}^{D+2} \sum_{n=1}^N Z_{mn} I_{nq} = E_{z_m}^i \Big|_t, \quad m = 1, 2, \dots, N(D+2)$$

式中  $Z_{mn}$  与前面相同, 即:

$$Z_{mn} = \frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} G_1(z_m, z') \cos \frac{\pi z'}{L} (2n-1) dz'$$

其中  $m$  应在所有单元上,  $z_m$  为匹配点坐标,  $z'$  表示电流元 (源点) 坐标, 两者可以在同一振子上. 在不同的振子上时, 可简单地认为电流源与匹配点 (场点) 都在振子轴线上.

在不同的振子上, 代数方程组分别为:

引向振子:

$$\sum_{q=1}^{D+2} \sum_{n=1}^N Z_{mn} I_{nq} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N \times D$$

反射振子:

$$\sum_{q=1}^{D+2} \sum_{n=1}^N Z_{mn} I_{nq} = 0, \quad m = N \times D + 1, \dots, N \times (D + 1)$$

有源振子:

$$\sum_{q=1}^{D+2} \sum_{n=1}^N Z_{mn} I_{nq} = \begin{cases} \frac{V_0}{\Delta l}, & m = N \times (D + 1) + 1 \\ 0, & m \neq N \times (D + 1) + 1 \end{cases}, \quad m = N \times (D + 1) + 1, \dots, N \times (D + 2)$$

电流分布也可以用分段正弦基, 具体解法见《电磁场数值分析方法》, 刘圣民著.

## 6.5 任意弯曲细线天线的矩量法解

### 6.5.1 电流分布的近似算子方程

对于任意形状的细线振子天线, 由于  $a \ll \lambda, a \ll l$ , 可以假设:

1. 电流沿导线轴线流动, 体电流密度  $\mathbf{J}$  可用线电流  $I$  近似;
2. 只存在沿导线轴向方向流动的电流  $I_l$ , 可忽略导线周向  $I_\varphi$  和径向  $I_\rho$  分量;
3. 线上电流仅为长度  $l$  的函数, 与  $\varphi, \rho$  无关, 即:  $\mathbf{I} = I(l)\hat{l}$ .

于是得到散射场 (在导体表面)

$$\mathbf{E}^s \cdot \hat{l} = -j\omega \mathbf{A} \cdot \hat{l} - \nabla \varphi \cdot \hat{l}$$

由导体表面边界条件可得

$$\mathbf{E}^i \cdot \hat{l} = j\omega \mathbf{A} \cdot \hat{l} + \nabla \varphi \cdot \hat{l}$$

由假设 1、2,

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mu \iiint_{v'} \frac{\mathbf{J} e^{-jkR}}{4\pi R} dv' & \rightarrow \mathbf{A} = \mu \int_l \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \mathbf{I}(l') dl' \\ \varphi = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_{v'} \frac{\rho e^{-jkR}}{4\pi R} dv' & \rightarrow \varphi = \frac{-1}{j\omega\varepsilon} \int_l \nabla' \cdot \mathbf{I}(l') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dl' \end{cases}$$

由假设 3,

$$\nabla \varphi \cdot \hat{l} = \frac{\partial \varphi}{\partial l}, \quad \nabla' \cdot \mathbf{I}(l') = \frac{\partial I(l')}{\partial l'}$$

将上述诸式代入边界条件式可得电流分布的算子方程:

$$\mathbf{L}(I) = E^i(l) \quad (6.61)$$

其中

$$\mathbf{L} = j\omega\mu \int_l \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dl' \hat{l} \cdot - \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial l} \int_l \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dl' \hat{l} \cdot \frac{\partial}{\partial l'}$$

这是一个微分—积分方程, 对于直线振子

$$\hat{l} = \hat{z}, \quad \frac{\partial}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial l'} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

则上式可以化为 Pocklington 方程.

为了简化计算, 采用近似算子, 将其中的微分用有限差分代替, 则方程为:

$$E^i \cdot \hat{l} = j\omega\mu \int_l G \hat{l} \cdot \mathbf{I}(l') dl' - \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{\Delta l} \left\{ \int_l \frac{1}{\Delta l'} \left[ I\left(l' + \frac{\Delta l'}{2}\right) - I\left(l' - \frac{\Delta l'}{2}\right) \right] G dl' \right\}_{l+\frac{\Delta l}{2}} + \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{\Delta l} \left\{ \int_l \frac{1}{\Delta l'} \left[ I\left(l' + \frac{\Delta l'}{2}\right) - I\left(l' - \frac{\Delta l'}{2}\right) \right] G dl' \right\}_{l-\frac{\Delta l}{2}} \quad (6.62)$$

## 6.5.2 电流分布的矩量法解

采用分域基、点选配求解上述近似算子方程. 将弯曲振子分成  $N + 1$  段, 每段长度为  $\Delta l_n$ , 主要是考虑天线末端边界条件 (电流为零), 在两端各留出两个半段. 设分段标点为  $1^+ = 2^-, 2^+ = 3^-, \dots$ , 如图 6.11 所示, 则整个区间:

$$l = \sum_{n=1}^{N+1} \Delta l_n^-$$

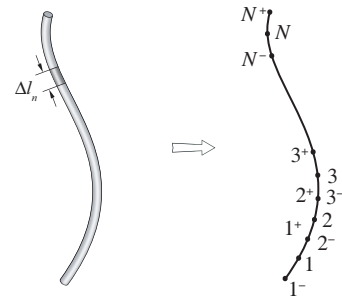


图 6.11 导线的离散

$\Delta l_n^-$  是  $\Delta l_n$  沿导线负方向移动半个区间的长度, 在近似算子中,  $\Delta l_n^- \sim \Delta l_n'$ , 所以

$$I_n \sim I\left(l' + \frac{\Delta l'}{2}\right); \quad I_{n-1} \sim I\left(l' - \frac{\Delta l'}{2}\right)$$

基函数为矩形脉冲,

$$\varphi_n(z') = \begin{cases} 1 & z' \in \Delta l_n \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则

$$I(l') = \sum_{n=1}^N I_n \varphi_n \Delta \hat{l}_n$$

式中  $\Delta \hat{l}_n$  是  $\Delta l_n$  的单位矢量,

$$\begin{aligned} E^i \cdot \hat{l} = j\omega\mu \int_l G \hat{l} \cdot I(l') dl' - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{\Delta l} \left[ \sum_{n=1}^{N+1} \int_{\Delta l_n^-} \frac{1}{\Delta l_n^-} (I_n - I_{n-1}) G dl' \right]_{l+\frac{\Delta l}{2}} \\ + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{\Delta l} \left[ \sum_{n=1}^{N+1} \int_{\Delta l_n^-} \frac{1}{\Delta l_n^-} (I_n - I_{n-1}) G dl' \right]_{l-\frac{\Delta l}{2}} \end{aligned} \quad (6.63)$$

将  $\Delta l_n$  沿轴向正向移动半个分区间的子区间, 记为  $\Delta l_n^+$ , 记及  $n^-$  与  $(n-1)^+$  重合, 则有:  $\Delta l_n^- = \Delta l_{n-1}^+$ , 计及  $I_0 = I_{N+1} = 0$ , 可得:

$$\sum_{n=1}^{N+1} \int_{\Delta l_n^-} \frac{1}{\Delta l_n^-} [I_n - I_{n-1}] G dl' = \sum_{n=1}^N I_n \left[ \int_{\Delta l_n^+} \frac{-1}{\Delta l_n^+} G dl' + \int_{\Delta l_n^-} \frac{1}{\Delta l_n^-} G dl' \right] \quad (6.64)$$

近似算子方程化为:

$$\begin{aligned} E^i \cdot \hat{l} = \sum_{n=1}^N I_n \left\{ j\omega\mu \int_{\Delta l_n} \Delta \hat{l}_n \cdot \hat{l} G dl' + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{\Delta l} \left[ \left( \frac{1}{\Delta l_n^+} \int_{\Delta l_n^+} G dl' - \frac{1}{\Delta l_n^-} \int_{\Delta l_n^-} G dl' \right) \right]_{l+\frac{\Delta l}{2}} \right. \\ \left. + \left( \frac{-1}{\Delta l_n^+} \int_{\Delta l_n^+} G dl' + \frac{1}{\Delta l_n^-} \int_{\Delta l_n^-} G dl' \right) \right]_{l-\frac{\Delta l}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (6.65)$$

上式中  $I_n$  之后相当于矩量法中  $L\varphi_n$ .

点选配, 取权函数  $w_m(z) = \delta(z - z_m)$ , 计及  $l_m + \frac{\Delta l_m}{2} = \Delta l_m^+$ ,  $l_m - \frac{\Delta l_m}{2} = \Delta l_m^-$ , 有  $\hat{l}_m = \Delta \hat{l}_m$ , 则:

$$\begin{aligned} E^i \cdot \Delta \hat{l}_m = \sum_{n=1}^N I_n \left\{ j\omega\mu \int_{\Delta l_n} \Delta \hat{l}_n \cdot \Delta \hat{l}_m G(m) dl' + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{\Delta l_m} \left[ \frac{1}{\Delta l_n^+} \int_{\Delta l_n^+} G(m^+) dl' \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\Delta l_n^-} \int_{\Delta l_n^-} G(m^+) dl' - \frac{1}{\Delta l_n^+} \int_{\Delta l_n^+} G(m^-) dl' + \frac{1}{\Delta l_n^-} \int_{\Delta l_n^-} G(m^-) dl' \right] \right\}, \quad m = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (6.66)$$

式中  $G(m)$ ,  $G(m^+)$ ,  $G(m^-)$  分别为场源  $dl'$  在  $m, m^+, m^-$  处产生的格林函数. 以  $\Delta l_m$  乘以上式左右, 则有:

$$E^i \cdot \Delta l_m = \sum_{n=1}^N I_n \left\{ j\omega\mu \frac{\Delta l_n \cdot \Delta l_m}{\Delta l_n} \int_{\Delta l_n} G(m) dl' + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \left[ \frac{1}{\Delta l_n^+} \int_{\Delta l_n^+} G(m^+) dl' - \frac{1}{\Delta l_n^-} \int_{\Delta l_n^-} G(m^+) dl' - \frac{1}{\Delta l_n^+} \int_{\Delta l_n^+} G(m^-) dl' + \frac{1}{\Delta l_n^-} \int_{\Delta l_n^-} G(m^-) dl' \right] \right\} \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (6.67)$$

写成矩阵形式

$$[Z_{mn}][I_n] = [V_m]$$

其中

$$V_m = E^i \cdot \Delta l_m$$

$$Z_{mn} = j\omega\mu \Delta l_n \cdot \Delta l_m \Psi(m, n) + \frac{1}{j\omega\varepsilon} [\Psi(m^+, n^+) - \Psi(m^+, n^-) - \Psi(m^-, n^+) + \Psi(m^-, n^-)]$$

如图 6.12 所示, 式中:

$$\begin{aligned} \Psi(m, n) &= \frac{1}{\Delta l_n} \int_{\Delta l_n} \frac{e^{-jkr_{mn}}}{4\pi r_{mn}} dl' \\ \Psi(m^+, n^+) &= \frac{1}{\Delta l_n^+} \int_{\Delta l_n^+} \frac{e^{-jkr_{m^+n^+}}}{4\pi r_{m^+n^+}} dl' \\ \Psi(m^+, n^-) &= \frac{1}{\Delta l_n^-} \int_{\Delta l_n^-} \frac{e^{-jkr_{m^+n^-}}}{4\pi r_{m^+n^-}} dl' \\ \Psi(m^-, n^+) &= \frac{1}{\Delta l_n^+} \int_{\Delta l_n^+} \frac{e^{-jkr_{m^-n^+}}}{4\pi r_{m^-n^+}} dl' \\ \Psi(m^-, n^-) &= \frac{1}{\Delta l_n^-} \int_{\Delta l_n^-} \frac{e^{-jkr_{m^-n^-}}}{4\pi r_{m^-n^-}} dl' \end{aligned}$$

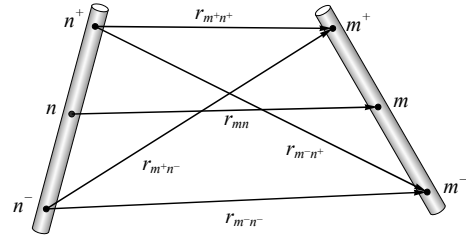


图 6.12 导线的两段

两点说明: (1) 若是直天线, 各区间平行,  $\Delta l_m \cdot \Delta l_n = \Delta l_m \Delta l_n$ . (2) 上述诸式理论上说对任意形状天线都成立, 但如果弯曲太厉害, 则略去横电流、径向电流及  $J_z$  沿周向均匀的假设都不成立, 此时上述细线近似就无法适用. 就工程应用而言, 上述诸式及相应的假设在两导线间相距 3 ~ 4 倍半径时才成立.

$Z_{mn}$  的计算归结为  $\Psi(m, n)$  等的计算

$$\Psi(m, n) = \frac{1}{4\pi \Delta l_n} \int_{n^-}^{n^+} \frac{e^{-jkr_{mn}}}{r_{mn}} dl' \quad (6.68)$$



它表示第  $n$  段上的电流在  $m$  点产生的位,  $\Psi(m^+, n^+)$  等类推. 当分段足够多时, 每一段可以认为是一段直线, 而且  $m \neq n$  时,  $r_{mn} \approx r$ , 即  $\Delta l_n$  中点至  $m$  点的距离.  $m = n$  时, 必须将指数项展开为 Maclaurin 级数, 取前二项近似, 可得:

$$\Psi(m, n) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi r} e^{-jkr} \\ \frac{1}{4\pi \alpha} \ln\left(\frac{2\alpha}{a}\right) - j\frac{k}{4\pi} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi r} e^{-jkr}, & m \neq n \\ \frac{1}{2\pi \Delta l_n} \ln\left(\frac{\Delta l_n}{a}\right) - j\frac{k}{4\pi} & m = n \end{cases} \quad (6.69)$$

更精确的计算请见: Pro.IEEE, Vol.55, No.2, Feb.1967, p136

### 6.5.3 天线参数的计算

#### I. 输入阻抗

$$[I_n] = [Z_{mn}]^{-1}[V_m] = [Y_{mn}][V_m]$$

故

$$I_i = Y_{ii} V_i$$

其中,  $I_i$  为输入端口分段电流,  $V_i$  为输入端口分段电压, 即激励电压,  $Y_{ii}$  为输入导纳, 于是

$$Y_{ii} = \frac{V_i}{I_i}, \quad Z_{ii} = \frac{1}{Y_{ii}}$$

若激励电压在第  $i$  段, 输入导纳就是  $[Y_{mn}]$  的第  $i$  个对角元.

#### II. 天线辐射场

$$\mathbf{E}^s = -j\omega \mathbf{A} - \nabla \varphi$$

对于远区场, 有  $A \propto \frac{1}{r}$ ,  $\varphi \propto \frac{1}{r}$ ,  $\nabla \varphi \propto \frac{1}{r^2}$ , 故

$$\mathbf{E}^s \approx -j\omega \mathbf{A}$$

又有

$$\mathbf{A} = \mu \int_{l'} \frac{\mathbf{I} e^{-jkr}}{4\pi r} dl' \approx \frac{\mu}{4\pi} \sum_{n=1}^N I_n \Delta l_n \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_n|}}{4\pi |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_n|}$$

对于远场:

$$\mathbf{A} \approx \mu \frac{e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} \sum_{n=1}^N I_n \Delta l_n e^{j\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}_n}$$

$$\mathbf{E} \approx -j\omega\mu \frac{e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} \sum_{n=1}^N I_n \Delta \mathbf{l}_n e^{j\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}_n}$$

对于  $E$  面有  $E_\theta = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{a}}_\theta = -j\omega A \cdot \hat{\mathbf{a}}_\theta$ ,

对于  $H$  面有  $E_\phi = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{a}}_\phi = -j\omega A \cdot \hat{\mathbf{a}}_\phi$ .

令  $\hat{\mathbf{a}}_p = \hat{\mathbf{a}}_\theta$  或  $\hat{\mathbf{a}}_\phi$ , 有

$$E_p \approx -j\omega\mu \frac{e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} [\mathbf{V}_n^p]^T [\mathbf{Y}_{mn}] [\mathbf{V}_m]$$

于是  $V_n^p$  类似于平面波的激励电压矩阵,

$$V_n^p = \hat{\mathbf{a}}_p \cdot \Delta \mathbf{l}_n e^{j\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}_n}$$

### III. 输入功率

$$P_{in} = \Re \left\{ [\mathbf{V}_m]^T [\mathbf{I}_n]^* \right\} = \Re \left\{ [\mathbf{V}_m]^T [\mathbf{Y}_{mn}^*] [\mathbf{V}_m^*] \right\}$$

### IV. 方向性增益

平均功率流密度为  $\frac{1}{\eta} |E_p(\theta, \varphi)|^2$ ,  $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ , 则

$$D = \frac{\frac{1}{\eta} |E_p|^2}{\frac{P_{in}}{4\pi r_0^2}} = \frac{4\pi r_0^2}{\eta} \cdot \frac{|E_p|^2}{P_{in}} = \frac{k^2}{4\pi} \eta \frac{|[\mathbf{V}_n^p]^T [\mathbf{Y}_{mn}] [\mathbf{V}_m]|^2}{\Re \left\{ [\mathbf{V}_m]^T [\mathbf{Y}_{mn}^*] [\mathbf{V}_m^*] \right\}}$$

## 6.5.4 应用实例

曲线振子八木天线的最大方向性优化设计 (IEEE Trans. On AP, Vol.31, No.3, May 1983, pp522~525)

讨论三单元曲线振子八木天线, 三根振子的长度相等, 均为波长的 1.5 倍,  $L = 1.5\lambda$ .

曲线方程为:

$$y = A \left( 1 - \frac{1}{1 + Bx^2} \right) + C$$

$A, B, C$  为确定振子形状的参数, 且:

$$A = 0.5A_1(\epsilon - 2)(\epsilon - 3) - A_2(\epsilon - 1)(\epsilon - 3) + 0.5A_3(\epsilon - 1)(\epsilon - 2)$$

$$B = 0.5B_1(\epsilon - 2)(\epsilon - 3) - B_2(\epsilon - 1)(\epsilon - 3) + 0.5B_3(\epsilon - 1)(\epsilon - 2)$$

$$C = 0.5C_1(\epsilon - 2)(\epsilon - 3) - C_2(\epsilon - 1)(\epsilon - 3) + 0.5C_3(\epsilon - 1)(\epsilon - 2)$$

$\epsilon = 1, 2, 3$  分别对应反射振子、有源振子和引向振子。

将原点固定在有源振子中心点上, 相应有:  $C_2=0$ , 故有八个独立参量. 在前述积分—微分方程中, 积分范围  $l$  应该包括三根振子, 并对他们统一分段、编号, 如  $3N + 3$  段, 同样可得:

$$[I_n] = [Z_{mn}]^{-1}[V_m] = [Y_{mn}][V_m], \quad n = 1, 2, \dots, 3N + 3$$

其中

$$I_n : \begin{cases} n = 1, 2, \dots, N + 1 & \rightarrow \text{反射振子} \\ n = N + 2, N + 3 \dots, 2N + 2 & \rightarrow \text{激励振子} \\ n = 2N + 3, 2N + 4 \dots, 3N + 3 & \rightarrow \text{引向振子} \end{cases}$$

方向性系数是  $A, B, C$  的函数

$$D = \frac{\pi}{\lambda^2} \eta \frac{|[V_n^P]^T [Y_{mn}] [V_m]|^2}{\Re \{ [V_m]^T [Y_{mn}^*] [V_m^*] \}}$$

通过改变这些系数, 优化得到  $D_{\max}$ , 是一个多维参量的优化. 每一次优化迭代、搜索, 对应了一次矩量法的求解过程, 工作量十分巨大. 如每一根振子分为 31 段, 对应两端各半段电流为 0, 展开系数为 30 个, 三根共 90 个. 但是注意, 振子形状关于  $y$  轴对称, 故可以减少一半, 每一次矩量法求解为  $[45 \times 45]$  阶矩阵, 优化方法也很重要, 可以用可变多面体法或可变容差法, 现在也可以用遗传算法.

数值结果:

			$D = 15.103$ (11.8dB)		
$L = 1.5\lambda,$	$a = 0.01\lambda$		$Z_{in} = 14.24 + j32.77$		
$A_1 = 0.38,$	$B_1 = 20.774,$	$C_1 = -0.162$	3dB-Beamwidth :	$E$ -Plane	$H$ -Plane
$A_2 = 0.395,$	$B_2 = 53.014,$	$C_2 = 0$		$32^\circ$	$62^\circ$
$A_3 = 0.364,$	$B_3 = 204.532,$	$C_3 = 0.151$	Maxium sidelobe:	$-19.35\text{dB}$	$-14.41\text{dB}$
			The Ratio of front - end:	$-14.67\text{dB}$	$-14.67\text{dB}$

## 6.6 本征值问题的矩量法解

本征值问题的重要性在于:

1. 本征函数可以作为基函数, 使类似问题的矩量法求解中广义阻抗矩阵为对角矩阵;
2. 物理问题的特性参数往往对应于本征值方程的本征值, 如传输线的传播常数、微带天线的谐振频率等.

广义本征值方程为  $\mathbf{A}U = \lambda\mathbf{B}U$ , 在算子  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  的定义域内选择一组基函数  $\{\varphi_n | n = 1, 2, \dots, N\}$ , 且令

$$U = \sum_n C_n \varphi_n$$

则算子方程成为

$$\sum_n C_n \mathbf{A}\varphi_n = \lambda \sum_n C_n \mathbf{B}\varphi_n$$

在算子  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  的值域内选择一组权函数  $\{w_m | m = 1, 2, \dots, N\}$ , 则

$$\sum_n C_n \langle w_m, \mathbf{A}\varphi_n \rangle = \lambda \sum_n C_n \langle w_m, \mathbf{B}\varphi_n \rangle, \quad m = 1, 2, \dots, N$$

写成矩阵形式则有:

$$[a_{mn}][C_n] = \lambda [b_{mn}][C_n]$$

上式为矩阵本征值方程, 仅当  $\det |a_{mn} - \lambda b_{mn}| = 0$  时才有非零解. 上式是关于  $\lambda$  的多项式, 其根为  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ :

- 1)  $\lambda_i$  是矩阵方程的本征值, 它逼近算子方程的本征值;
- 2)  $[C_n]_1, [C_n]_2, \dots$  是矩阵方程的本征矢量, 也是本征函数的系数, 即:  $\varphi_i^a = [\varphi_n]^T [C_n]_i$ , 它逼近算子方程的本征函数.

在矩阵本征方程中,

$$[b_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle w_1, \mathbf{B}\varphi_1 \rangle & \langle w_1, \mathbf{B}\varphi_2 \rangle & \cdots & \langle w_1, \mathbf{B}\varphi_N \rangle \\ \langle w_2, \mathbf{B}\varphi_1 \rangle & \langle w_2, \mathbf{B}\varphi_2 \rangle & \cdots & \langle w_2, \mathbf{B}\varphi_N \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_N, \mathbf{B}\varphi_1 \rangle & \langle w_N, \mathbf{B}\varphi_2 \rangle & \cdots & \langle w_N, \mathbf{B}\varphi_N \rangle \end{bmatrix}$$

一般的本征方程为:  $\mathbf{A}U = \lambda U$ , 相对于广义本征值方程中  $\mathbf{B}$  算子为恒等算子.

1. 即使  $\mathbf{B}$  为恒等算子,  $[b_{mn}]$  也不是单位矩阵;
2. 大多数求解矩阵算子方程的程序是针对  $[a_{mn}][C_n] = \lambda [C_n]$  的, 应用他们求解上述本征值问题时必须先处理为  $[b_{mn}]^{-1}[a_{mn}][C_n] = \lambda [C_n]$ .

### 例 本征值问题

$$\begin{cases} -\frac{d^2 f}{dx^2} = \lambda f \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

此问题的解析解为:

$$\begin{aligned} \text{本征值: } \lambda_i &= (i\pi)^2, \quad i = 1, 2, \dots \\ \text{本征函数: } f_i &= \sqrt{2} \sin(i\pi x), \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

上述本征函数解中, 已关于  $\langle f, g \rangle = 1$  归一化. (即求解  $\int_0^1 C^2 \sin^2(i\pi x) dx = 1$ , 得  $C = \sqrt{2}$ )

矩量法解, 选取基函数和权函数:

$$\varphi_n = x - x^{n+1}, \quad w_n = \varphi_n = x - x^{n+1}$$

则

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \langle w_m, \mathbf{L}\varphi_n \rangle = \frac{mn}{m+n+1} \\ b_{mn} &= \langle w_m, \varphi_n \rangle = \frac{mn(m+n+6)}{3(m+3)(n+3)(m+n+3)} \end{aligned}$$

解为:

$$\begin{aligned} N=1 \quad \lambda_1^{(1)} &= 10 \quad f_1^{(1)} = \sqrt{30}(x-x^2) \\ N=2 \quad \lambda_1^{(2)} &= 10 \quad f_1^{(2)} = f_1^{(1)} \\ &\quad \lambda_2^{(2)} = 42 \quad f_2^{(2)} = 3\sqrt{210}(x-x^2) \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

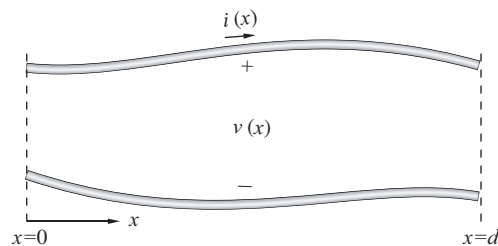
本征值:

$N$	$\lambda_1^{(N)}$	$\lambda_2^{(N)}$	$\lambda_3^{(N)}$	$\lambda_4^{(N)}$
1	10.000			
2	10.000	42.000		
3	9.8697	42.000	102.133	
4	9.8697	39.497	102.133	200.583
精确值	9.8696	39.478	88.826	157.914

## 6.7 非均匀传输线本征值问题

考虑无损耗非均匀传输线如图 6.13, 其单位长度串联电感  $l(x)$ , 单位长度并联电容  $c(x)$ , 对于时谐问题有:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \Re[V(x)e^{j\omega t}] \\ i(x, t) &= \Re[I(x)e^{j\omega t}] \end{aligned}$$



传输线方程:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} = -j\omega l(x)I \\ \frac{dI}{dx} = -j\omega c(x)V \end{cases}$$

假定  $x = 0, x = d$  时开路, 边界条件为:  $I(0) = I(d) = 0$ , 如此即构成本征值问题, 目的是确定传输线上的自然谐振频率  $\omega_i$ .

定义矩阵:

$$U = \begin{bmatrix} V(x) \\ I(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dx} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} c(x) & 0 \\ 0 & -l(x) \end{bmatrix}$$

则广义本征值算子方程为:  $\mathbf{A}U = j\omega\mathbf{B}U$ , 它与边界条件构成本征值问题.

上述算子方程也可以化为二阶微分算子方程, 即传输线电报方程为:

$$\begin{cases} -\frac{d^2 I}{dx^2} + \frac{1}{c} \frac{dc}{dx} \frac{dI}{dx} = \omega^2 l c I \\ -\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{1}{l} \frac{dl}{dx} \frac{dV}{dx} = \omega^2 l c V \end{cases}$$

定义:  $\mathbf{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{c} \frac{dc}{dx} \frac{d}{dx}$ ,  $\mathbf{B} = l(x)c(x)$ , 则广义本征值算子方程为:

$$\mathbf{A}I = \omega^2 \mathbf{B}I$$

此方程的本征值为  $\omega^2$ , 与边界条件构成本征值问题.

### 6.7.1 二阶微分算子的矩量法解

二阶微分算子:  $\mathbf{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{c} \frac{dc}{dx} \frac{d}{dx}$ , 对于内积:  $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^d f_1(x)f_2(x)dx$ , 算子  $\mathbf{A}$  不是自伴算子, 此时  $\mathbf{A}$  的伴随算子为

$$\mathbf{A}_a f = -\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{f}{c} \frac{dc}{dx} \right]$$

对于 Sturm-Liouville 问题:

$$-\frac{1}{\omega} \frac{d}{dx} \left( p \frac{df}{dx} \right) - qf = \lambda r f$$

定义加权内积

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^d w(x) f_1(x) f_2(x) dx$$

则算子  $\mathbf{A} = -\frac{1}{\omega} \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} \right) - q$  为自伴算子. 算子  $\mathbf{A}$  可化为:

$$\mathbf{A}I = -e^{\ln C} \frac{d}{dx} \left( e^{\ln C} \frac{dI}{dx} \right)$$

所以, 在内积定义为

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^d e^{-\ln C(x)} f_1(x) f_2(x) dx$$

时, 算子  $\mathbf{A}$  为自伴算子. 故矩量法解应该在此内积定义下进行.

例  $l$  和  $c$  为常数, 二阶微分本征算子方程为:

$$\begin{cases} -\frac{d^2 I}{dx^2} = \lambda I, & \lambda = \omega^2 l c \\ I(0) = I(1) = 0 \end{cases}$$

此方程前面解过, 在此以三角形函数为基函数的 Галёркин 法求解.

$$\varphi_n = w_n = \begin{cases} 1 - |x|(N+1), & |x| < \frac{1}{(N+1)} \\ 0 & |x| > \frac{1}{(N+1)} \end{cases}$$

$$a_{mn} = \begin{cases} 2(N+1), & m = n \\ -(N+1), & |m-n| = 1 \\ 0, & |m-n| > 1 \end{cases}$$

$$b_{mn} = \begin{cases} \frac{2}{3(N+1)}, & m = n \\ \frac{1}{6(N+1)}, & |m-n| = 1 \\ 0, & |m-n| > 1 \end{cases}$$

解为

$N$	$\lambda_1^{(N)}$	$\lambda_2^{(N)}$	$\lambda_3^{(N)}$	$\lambda_4^{(N)}$
1	12.000			
2	10.800	54.000		
3	10.386	48.000	128.868	
4	10.198	44.903	116.118	227.838
精确值	9.870	39.478	88.826	157.914

可以看出, 收敛速度比前面幂级数基函数的 Галёркин 法慢得多, 原因在于幂级数比分段线性函数 (三角形函数) 性能好.

### 6.7.2 一阶微分算子的矩量法解

将传输线以  $x_n, (n = 1, 2, \dots, N)$  等分为  $n$  段,  $x_n$  向原点方向移动半个区间为  $x'_n$ , 则  $V_n$  为  $x_n$  点的线间电压,  $I_n$  为  $x'_n$  点的线上电流. 不失一般性, 令  $d = 1$ , 则

$$x_n = \frac{n}{N}, \quad x'_n = \frac{n - \frac{1}{2}}{N}$$

定义脉冲函数:

$$p(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{1}{2}N \\ 0 & |x| > \frac{1}{2}n \end{cases}$$

采用脉冲基函数的 Галёркин 法, 即:

$$\begin{aligned} \varphi_n^V = w_n^V &= \begin{bmatrix} p(x - x_n) \\ 0 \end{bmatrix} \sim atx_n \\ \varphi_n^I = w_n^I &= \begin{bmatrix} 0 \\ p(x - x'_n) \end{bmatrix} \sim atx'_n \end{aligned}$$

定义内积为

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \int_0^1 u_1^T u_2 dx = \int_0^1 [V_1(x)V_2(x) + I_1(x)I_2(x)] dx$$

不难验证, 上述定义满足内积定义的要求, 在此内积定义下, 一阶矩阵算子是自伴的.

待求函数  $u$  展开为:

$$U = \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \alpha_n \varphi_n^V \\ \sum \beta_n \varphi_n^I \end{bmatrix}$$



算子方程为:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum \alpha_n \varphi_n^V \\ \sum \beta_n \varphi_n^I \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} c(x) & 0 \\ 0 & -l(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum \alpha_n \varphi_n^V \\ \sum \beta_n \varphi_n^I \end{bmatrix}$$

用  $w_n^V$  和  $w_n^I$  分别对上式求加权内积, 得矩阵形式方程为:

$$[a_{mn}] [e_n] = j\omega [b_{mn}] [e_n] \quad (6.70)$$

$$[e_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{N+1}]^T$$

$$[b_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle w_m^V, \mathbf{B}\varphi_n^V \rangle & \langle w_m^V, \mathbf{B}\varphi_n^I \rangle \\ \langle w_m^I, \mathbf{B}\varphi_n^V \rangle & \langle w_m^I, \mathbf{B}\varphi_n^I \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C] & 0 \\ 0 & -[L] \end{bmatrix}$$

$$[a_{mn}] = \begin{bmatrix} 0 & \Delta_I \\ -\Delta_V & 0 \end{bmatrix}$$

式中:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_N \end{bmatrix}, \quad [L] = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_N \end{bmatrix}$$

且

$$L_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} l(x) dx, \quad C_n = \int_{x'_n}^{x'_{n+1}} c(x) dx$$

注意,  $C_0$  和  $C_N$  只在半个区间上积分. 又

$$\Delta_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times N}, \quad \Delta_V = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}_{N \times (N+1)}$$

代数方程还可以写为:

$$\begin{bmatrix} 0 & \Delta_I \\ -\Delta_V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} [C] & 0 \\ 0 & [L] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}$$

数值结果为:

$N$	$\lambda_1^{(N)}$	$\lambda_2^{(N)}$	$\lambda_3^{(N)}$	$\lambda_4^{(N)}$
1	4.000			
2	7.000	16.000		
3	9.000	27.000	36.000	
4	9.373	29.614	54.627	64.000
精确值	9.870	39.478	88.826	157.914

我们还可以用分段线性(三角形)函数为基函数的 Галёркин 法, 结果比脉冲基 Галёркин 法收敛快. 所以有如下结论:

1. 一阶微分方程的脉冲基比二阶微分方程的分段线性基收敛慢, 但一阶微分方程的分段线性基比二阶微分方程的分段线性基收敛快, 说明展开函数的性能直接了解决的收敛性;
2. 一阶微分方程的解总小于精确解, 而二阶微分方程的解总大于精确解, 前者给出了解的下限, 后者给出了解的上限;
3. 对于任意  $l(x)$ 、 $c(x)$  的传输线, 一阶微分方程的矩量法解更容易得到通用程序.

## 6.8 柱形波导本征值问题的矩量法解

对于一均匀截面的波导, 场分量满足下列 Helmholtz 方程

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + k_c^2 \Psi = 0$$

对于 TM 模式,  $\Psi = E_z$ , 满足第一类边界条件, 即  $\Psi|_C = 0$ .

对于 TE 模式,  $\Psi = H_z$ , 满足第二类边界条件, 即  $\left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_C = 0$

$k_z = 2\pi/\lambda_c$ ,  $\lambda_c$  是截止波长,  $k_c$  是截止波数. 令

$$\mathbf{A} = -\nabla_{xy}^2 = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad k_c^2 = \lambda$$

则  $\mathbf{A}\Psi = \lambda\Psi$  本征值算子方程.

将波导截面划分为间距  $h$  的网格, 网格的交点确定了一组相距  $h$  的点, 如图 6.14 所示, 令基函数和权函数分别为

$$f_n = w_n = T(x - x_n)T(y - y_n)$$

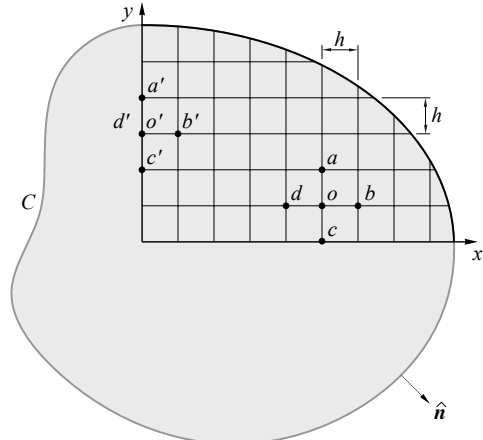
$x_n, y_n$  为网格点, 则

$$T(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{h} & |x| < h \\ 0 & |x| > h \end{cases}$$

$$[a_{mn}][C_n] = \lambda [b_{mn}][C_n]$$

定义  $d(m, n) = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}$ , 当基函数全部在波导截面内时, 有

$$a_{mn} = \begin{cases} \frac{8}{3} & d(m, n) = 0 \\ -\frac{1}{3} & d(m, n) = h \ \& \ \sqrt{2}h \\ 0 & d(m, n) > \sqrt{2}h \end{cases}, \quad b_{mn} = \begin{cases} \frac{9}{4}h^2 & d(m, n) = 0 \\ \frac{1}{9}h^2 & d(m, n) = h \\ \frac{1}{36}h^2 & d(m, n) = \sqrt{2}h \\ 0 & d(m, n) > \sqrt{2}h \end{cases}$$



对于 TM Mode: 在边界上,  $\Psi = 0$ , 故在边界上的网格点无展开函数, 所有其他点的展开函数完全在  $C$  内, 因而所有矩阵元素由上式给出.

对于 TE Mode: 在  $C$  上  $\partial\Psi/\partial n|_C = 0$ , 网格内点有展开函数, 它在边界在为 0, 为了满足边界条件, 1) 在边界上增加展开函数; 2) 在接近边界的点处修改展开函数, 使  $C$  上  $\Psi \neq 0$ . 第一种途径要增大矩阵, 第二种途径保持了 TM 模和 TE 模矩阵大小相同, 应该说后者优于前者.

### 6.9 矩量法求解中的一些关键技术

设有算子方程  $\mathbf{L}U = f$ , 基函数为  $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]^T$ , 则  $U = \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{C}$ , 式中  $\mathbf{C} = [C_1, C_2, \dots, C_N]^T$  为展开系数, 权函数为  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_N]^T$ , 则算子方程化为矩阵方程

$$[\mathbf{Z}][\mathbf{C}] = [\mathbf{V}]$$

其中  $Z_{mn} = \langle w_m, L\varphi_n \rangle, m = 1, 2, \dots, M, n = 1, 2, \dots, N, V_m = \langle w_m, f \rangle, m = 1, 2, \dots, M$ , 则数值解为

$$U = \boldsymbol{\varphi}^T [\mathbf{Z}]^\dagger \mathbf{V}$$

式中  $[\mathbf{Z}]^\dagger$  是阻抗矩阵的广义逆矩阵, 即

$$[\mathbf{Z}]^\dagger = \begin{cases} [\mathbf{Z}]^{-1}, & M = N \\ ([\mathbf{Z}^*]^T [\mathbf{Z}])^{-1} [\mathbf{Z}^*]^T, & M \neq N \end{cases}$$

矩量法的几大不足

1. 对分析对象为电大尺寸的物体时, 为了满足计算精度的要求, 必须增加展开函数的数量  $N$ , 导致阻抗矩阵的阶数增大, 计算机内存和 CPU 耗时也增加;
2. 基函数矢量和权函数矢量的选择凭经验, 带有较大的盲目性;
3. 矩量法是一种“边界型”数值方法, 虽然较之有限元法、有限差分法等场域型方法而言, 占用的计算机内存、CPU 时间较少, 但用来处理带有非均匀介质的电磁场问题却很不方便; 这里的边界型主要是在算子方程的建立和内积过程中体现, 但要用到关于处理场域的格林函数, 不均匀介质区域很不方便;
4. 较之有限元法、有限差分法等局域型方法而言, 矩量法在广义阻抗矩阵元素的计算上所费时间要多得多, 有时是主要的。

矩量法的发展主要是针对这几个方面的. 这里涉要介绍一些.

### 6.9.1 迭代技术

若  $[Z]$  为  $n$  阶非奇异矩阵, 可将其拆为两部分,

$$[Z] = [P] + [Q]$$

则可用如下迭代形式求解矩阵方程:

$$C^{(k+1)} = -[P]^{-1}[Q]C^{(k)} + [P]^{-1}V$$

该迭代收敛的充要条件是矩阵  $([P]^{-1}[Q])$  的谱半径 (即该矩阵本征值绝对值的最大值) 小于 1, 而不论该迭代的初试解取什么样的矢量.

这一充要条件的意义是: 矩阵  $[P]$  应将矩阵  $[Z]$  的充分多的大绝对值元素包括在内, 迭代才收敛.

经典的迭代技术有: Guass-Seidel 迭代、Jacobi 迭代、松弛迭代等, 这里介绍一些结合矩量法发展的迭代方法, 他们在许多大尺寸电磁问题中获得了很大的成功.

#### I. 条带矩阵迭代法 (Banded Matrix Iteration: BMI)

由 T.R.Ferguson 等提出<sup>[17]</sup>.

将  $[Z]$  拆为三部分:

$$[Z] = [H] + [L] + [U]$$

其中  $[H]$  表示  $[Z]$  中以主对角线元素为中心的条带;  $[L]$ 、 $[U]$  分别表示  $[Z]$  中处于  $[H]$  下、上方的下三角矩阵和上三角矩阵, 在将物体分块并采用分域基函数矢量对算子方程离散化的过程中, 对不同的分块适当编号, 以使得比较相邻的分块有相近的编号, 只有条带矩阵不太窄, 就可以保证  $[Z]$  中的绝大多数绝对值较大的元素在矩阵  $[H]$  中, 而迭代的形式为:

$$C^{(k+1)} = -[H]^{-1}([L] + [U])C^{(k)} + [H]^{-1}V$$

## II. 算子修正迭代法 (Operator Corrector Iteration: OCI)

由 Demarest 和 Kalbasi 两人于 1989 年提出<sup>[14]</sup>, 大大地简化了迭代计算.

定义一个  $n$  阶对角方阵  $[D^{(k)}]$ , 使得

$$[D^{(k)}] C^{(k)} = [Q] C^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

即  $d_{ii}^{(k)} = \frac{1}{c_i^{(k)}} \sum_{j=1}^N q_{ij} c_j^{(k)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $d_{ii}^{(k)}$  为  $[D^{(k)}]$  的对角线元素. 近似可以认为

$$\frac{c_j^{(k)}}{c_i^{(k+1)}} \approx \frac{c_j^{(k)}}{c_i^{(k)}}$$

即  $[D^{(k)}] C^{(k+1)} \approx [Q] C^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , 则可得迭代形式为

$$C^{(k+1)} = ([P] + [D^{(k)}])^{-1} V$$

式中  $[D^{(k)}]^{-1}$  就是修正算子, 且有:

$$[D^{(k)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{11}^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}^{(k)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_{NN}^{(k)}} \end{bmatrix}$$

注意  $d_{ii}^{(k)}$  仍然由前式决定.

## III. 影响区域迭代法 (Sphere of Influence Techniques: SOI)

由 V.P.Cable 提出<sup>[4]</sup>, 对前述矩阵方程. 假设如下迭代求解程式:

$$C^{(k+1)} = C^{(k)} + M^{(k)}$$

$M^{(k)}$  代表第  $k$  次迭代时的修正矢量. 在第  $k$  次迭代后, 误差矢量  $R^{(k)}$  为

$$R^{(k)} = V - [Z] C^{(k)}$$

考虑矩阵方程及上述两式, 显然有:

$$[Z] \mathbf{M}^{(k)} = \mathbf{R}^{(k)}$$

问题归结为如何由上式求  $\mathbf{M}^{(k)}$ , 直接求解失去了迭代法的意义. 于是事先给定一个小于 1 的正数  $g$ , 我们按照下面方式定义  $n$  个  $[S]$  的子方阵  $\{[\tilde{S}(i)], i = 1, 2, \dots, N\}$ . 在矩阵  $[S]$  的第  $i$  行中, 以满足条件  $(|S_{ij}| / |S_{ii}|) > g, i = 1, 2, \dots, N$  的所有元素为基础, 由相关行、列组成子方阵, 即为  $\{[\tilde{S}(i)], i = 1, 2, \dots, N\}$ , 并相应地定义  $\mathbf{M}^{(k)}$  为  $n$  个子矢量  $\tilde{M}^{(k)}(i)$  和  $\mathbf{R}^{(k)}$  的  $n$  个子矢量  $\tilde{R}^{(k)}(i)$ , 得

$$[\tilde{S}(i)] \tilde{M}^{(k)}(i) = \tilde{R}^{(k)}(i)$$

例 以  $i = 3, g = 0.8$  为例, 设在  $[Z]$  的第 3 行中, 仅仅有元素  $Z_{32}$  和  $Z_{36}$  对的绝对值超过  $Z_{33}$  的 80%, 则,

$$[\tilde{Z}(3)] = \begin{bmatrix} Z_{22} & Z_{23} & Z_{26} \\ Z_{32} & Z_{33} & Z_{36} \\ Z_{62} & Z_{63} & Z_{66} \end{bmatrix}$$

相应地,  $\tilde{M}^{(k)}(3) = [M_2^{(k)}, M_3^{(k)}, M_6^{(k)}]^T$ ,  $\tilde{R}^{(k)}(3) = [R_2^{(k)}, R_3^{(k)}, R_6^{(k)}]^T$ . 直接求解上述方程得到  $\tilde{M}^{(k)}(i)$ , 则

$$C_i^{(k+1)} = C_i^{(k)} + M_i^{(k)}$$

对  $i = 1, 2, \dots, N$  重复上述过程, 就完成了第  $k$  次迭代, 由于  $\tilde{Z}^{(k)}(i)$  的阶数通常较小, 当  $[Z]$  的阶数较大时, 这一算法是十分经济的.

#### IV. 共轭梯度法 (Conjugate Gradient Method:CGM)

由 T. K. Sarkar 等人提出<sup>[45]</sup>, 另外, AP1990 年有四篇争论文章)

求解矩阵方程的共轭梯度法已经十分成熟, 但 Sarkar 等人发展了这一方法: 使 CGM 不仅能求解矩阵方程, 还可以直接用来求解算子方程, 省去了求解系数矩阵各元素的过程; 较之经典的矩量法, 在求解电大尺寸问题的电磁场模型时有明显的优势; 理论上讲, 如果不存在计算机的舍入误差和截断误差, 在  $n$  维空间的 CGM 迭代, 仅仅需要最多  $n$  步迭代即可收敛到精确解. CGM 具体的迭代形式有许多种, 这儿介绍一种比较简单而有效的方法.

对算子方程  $\mathbf{A}U = f$ , 取定迭代程式为:

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} + t_k P_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

初始解  $U^{(0)}$  可以任意选取,  $t_k$  为第  $k$  次迭代的最优化步长,  $P_k$  为第  $k$  次迭代的搜索方向, 对应上述迭代程式, 残差为:

$$R^{(k+1)} = f - \mathbf{A}U^{(k+1)} = R^{(k)} - t_k \mathbf{A}P_k$$

则

$$t_k = \frac{\|\mathbf{A}^a R^{(k)}\|^2}{\|\mathbf{A} P_k\|^2}, \quad P_{k+1} = \mathbf{A}^a R^{(k+1)} + \beta_k P_k, \quad P_0 = \mathbf{A}^a R^{(0)}, \quad \beta_k = \frac{\|\mathbf{A}^a R^{(k+1)}\|^2}{\|\mathbf{A}^a R^{(k)}\|^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

式中  $\mathbf{A}^a$  是  $\mathbf{A}$  的伴随算子, 它由 Hilbert 空间上的内积定义. 可以证明

1) 搜索方向的映射函数集合  $\{t P_k\}$  为正交函数组, 即

$$\langle \mathbf{A} P_i, \mathbf{A} P_j \rangle = \|\mathbf{A} P_i\|^2 \delta_{ij}$$

2) 残差的范数随着迭代次数的增加而单调下降, 即

$$\|R^{(k)}\|^2 - \|R^{(k+1)}\|^2 > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

还可以将快速 Fourier 变换与 CGM 结合运用, 进一步提高该迭代技术的效率<sup>[44]</sup>.

## 6.9.2 空间分解技术

基本思路是: 对于被研究的物体, 电气尺寸较大时, 可以将该物体分解为若干个电气尺寸较小的物体, 然后对各小物体进行矩量法分析, 再将各小物体之间的耦合作用通过适当的方式考虑进去, 这是一种“化整为零”的策略, 可以省去计算机内存和计算时间, 并拓展矩量法的应用领域.

### I. 空间分解技术 (Spatial Decomposition Technique)

由 Umashankar 等人提出<sup>[49,50]</sup>. 假设待研究的电磁物体为自由空间中的一介质散射体. 首先将该介质体分割为  $M$  个小的介质体, 接着对每一个小的介质体分别进行矩量法分析, 在每一个子域的表面分别获得等效电流和等效磁流分布. 具体步骤为:

1. 第一个子域上的激励电磁场由两部分组成 (1) 原来的入射场; (2) 其余各子域的等效电流和等效磁流向自由空间的辐射场. 由于这些等效电磁流尚为未知量, 最初可以用物理光学原理所建立的电磁流来近似它们;
2. 第二个子域上的激励由三部分组成: (1) 原来的入射场; (2) 第一个子域由矩量法求解得到的等效电磁流向自由空间辐射的电磁场; (3) 其余各子域上由物理光学建立的电磁流的辐射场;
3. 第三个子域上的激励求法与第二个子域相同, 仅仅时第二个子域的影响由刚求出的场代替. 余类推.

上述为由零阶电磁流分布求得的一阶电磁流分布.

这样的迭代计算过程可以类似地进行下去, 以求得各子域高阶等效面电磁流分布. 可以想象, 等效电磁流的阶数越高, 则相邻两子域交界面上的等效面电流和等效面磁流应当越接近 (大小

相等、方向相反), 当接近程度达到我们所需精度, 所有子域中与自由空间交界面上的等效电磁流就构成了该介质散射体上待求的等效面电流和面磁流.

## II. 破折技术 (Diakoptic Theory: DT)

破折理论<sup>[18,47]</sup>也属于空间分解技术的一种形式, 即“化整为零”. 如对于线天线, “破折”为若干个子线段, 每一段破折口处构成了一对端口, 然后用网格分析的观点进行研究. 详细的概念上的描述较为复杂, 但数学结论很简单:

找出一个基底转换矩阵  $[T]$ , 将矩阵方程中  $N$  维矢量  $\mathbf{C}$  降为  $L$  维矢量  $\mathbf{C}'$ , 即:  $\mathbf{C} = [T]\mathbf{C}'$ , 其中

$$[T] : N \times L; \quad \mathbf{C} : N \times 1; \quad \mathbf{C}' : L \times 1; \quad L < N$$

则

$$[Z]\mathbf{C} = \mathbf{V} \rightarrow [Z][T]\mathbf{C}' = \mathbf{V} \rightarrow [T]^T[Z][T]\mathbf{C}' = [T]^T\mathbf{V}$$

显然已经将一个  $N \times N$  阶线性系统简化为  $L \times L$  阶线性系统. 问题的关键是要找到合适的基底转换矩阵  $[T]$ .

## III. 阻抗矩阵局部化技术 (Impedance Matrix Localization: IML)

由 Canning<sup>[7]</sup> 提出. 为了说明问题方便, 以总长度为  $L$  的弯曲导线散射为例

1. 首先将导线按“空间分解”原则分为  $M$  个子段:  $\{\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_M\}$ ;
2. 在第  $n$  个子段  $\Delta l_n$  上, 选择下列形式的  $N_n$  个“全域”基函数

$$\varphi_{pn}(l) = \exp(j2\pi pl/\Delta l_n), \quad l \in \Delta l_n, \quad n = 1, 2, \dots, M; \quad P = 0, 1, 2, \dots, N_{n-1}$$

由天线理论不难得出, 在子段  $\Delta l_n$  上基函数电流  $\varphi_{pn}(l)$  所建立的最大辐射方向  $\theta_p$  为

$$\sin \theta_p = \frac{2\pi p}{k_0 L}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, N_{n-1}$$

式中  $\theta_p$  为最大辐射方向与子段  $\Delta l_n$  法线方向的夹角,  $k_0$  为自由空间波数. 注意, 在最初的剖分中, 每一个子段要充分小, 使每一个子段有确定的法线方向.

3. 用 Галёркин 法选取权函数, 则  $\Delta l_m$  段的  $N_m$  个权函数与  $\Delta l_n$  段上的  $N_n$  个基函数构成阻抗矩阵中的  $N_m \times N_n$  分快矩阵. 在这一分快矩阵中, 当  $\Delta l_n$  的最大辐射方向与  $\Delta l_m$  的最大接收方向比较接近时, 元素数值很大, 而那些两种方向偏离较大的元素值就会很小. 从而使阻抗矩阵元素集中化, “局部化”的意义是将数值很小的元素近似用零替代, 则阻抗矩阵大大地稀疏化, 节约了计算机的内存和 CPU 时间.



为了进一步提高局部化的效果,“全域基”还可以选择使幅度也变化,如:

$$f_{pn}(l) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \frac{\pi(l-l_n)}{\Delta l_n} \right] \exp \left( \frac{j2\pi pl}{\Delta l_n} \right), & n = 1, 2, \dots, M, P = 0, 1, 2, \dots, N_{n-1}; \quad |l-l_n| \leq \Delta l_n \\ f_{pn}(l) = 0, & |l-l_n| > \Delta l_n \end{cases}$$

值得一提的是,IML 技术不需要另外编制计算机程序,经典的矩量法程序做一些简单的变化就可以使用.

### 6.9.3 对角化技术

假如选取基函数  $\{\varphi_n\}$  与权函数  $\{w_m\}$ , 使他们构成  $\mathbf{L}$  正交, 即

$$Z_{mn} = \langle w_m, \mathbf{A}\varphi_n \rangle \delta_{mn}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots, N$$

则  $[Z]$  就被对角化了, 其逆矩阵也是对角矩阵, 而且元素就是  $\{\langle w_m, \mathbf{A}\varphi_n \rangle \delta_{mn}\}^{-1}$ . 算子方程的解就可以直接写成

$$U = \sum_{n=1}^N \langle w_m, f \rangle \langle w_m, \mathbf{A}\varphi_n \rangle^{-1} \varphi_n$$

问题的关键是找到满足这一条件的基函数  $\{\varphi_n\}$  和权函数  $\{w_m\}$ .

#### I. 奇异值分解技术 (Singular Value Decomposition: SVD)

在矩阵方程中,  $[Z]$  为  $n$  阶方阵. 设  $[U]$  和  $[w]$  也为  $n$  阶方阵, 且他们的列矢量满足联立方程 [6]:

$$\begin{cases} [Z]U_i = \sigma_i W_i \\ [Z^*]^T W_i = \sigma_i U_i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

式中  $[Z^*]^T$  是  $[Z]$  的共轭转置矩阵, 而  $U_i, W_i$  分别为:

$$[U] = [U_1, U_2, \dots, U_N], \quad [w] = [W_1, W_2, \dots, W_N]$$

由上述联立方程可得:

$$\begin{cases} [Z^*]^T [Z]U_i = \sigma_i^2 U_i \\ [Z][Z^*]^T W_i = \sigma_i^2 W_i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$[Z][Z^*]^T$  和  $[Z^*]^T [Z]$  均为 Hermite 矩阵而且正定, 所以矩阵  $[U]$  和  $[W]$  必为 Unitary 矩阵, 即:

$$[U^*]^T = [U]^{-1}, \quad [w^*]^T = [w]^{-1}$$

矩阵  $[Z]$  奇异值  $\sigma_i$  必为实数. 所以,

$$\begin{aligned}
 [W^*]^T [Z][U] &= [W^*]^T \left( \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^T \\ W_2^T \\ \vdots \\ W_n^T \end{bmatrix} \right)^T \\
 &= [W^*]^T [W] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

这就是奇异值分解定理, 它将矩阵  $[Z]$  对角化了. 则矩阵方程的解为

$$C = \sum_{n=1}^N \langle w_n, V \rangle \sigma_n^{-1} U_n$$

## II. 特征模技术 (Characteristic Modes: CM)

由 Garbarg 和 Harrington 分别提出 [19].

对于算子方程:  $\mathbf{A}U = f$ , 令基函数等于权函数  $\varphi_n = w_n$ , 且为下列本征值问题的本征函数:  $\mathbf{A}_x \varphi_n = \lambda_n \mathbf{A}_r \varphi_n$ , 其中  $\mathbf{A}_r, \mathbf{A}_x$  分别为算子  $\mathbf{A}$  的实部算子和虚部算子. 显然他们均为自伴算子. 且  $\mathbf{A}_r$  为正定算子. 依据数学理论, 所有本征值为实数, 本征函数必满足下列正交特性:

$$\langle \varphi_m, \mathbf{A}_r \varphi_n \rangle = \delta_{mn}, \quad \langle \varphi_m, \mathbf{A}_x \varphi_n \rangle = \lambda_n \delta_{mn}$$

即

$$\langle \varphi_m, \mathbf{A} \varphi_n \rangle = (1 + j\lambda_n) \delta_{mn}$$

可见, 广义阻抗矩阵被对角化了, 方程的解为

$$U = \sum_{n=1}^N \langle \varphi_n, f \rangle (1 + j\lambda_n)^{-1} \varphi_n$$

## III. 正交模技术 (Orthogonal Modes: OM)

正交模技术 [21] 较特征模技术而言, 正交特性更普遍, 但计算的工作量要大一些. 这种方法既可用于求解矩阵方程, 也可用于直接求解算子方程. 取全域展开基函数为下列本征值问题的本征函数 (即正交模)

$$\mathbf{A}^a \mathbf{A} \varphi_n = \lambda_n \varphi_n$$

$\mathbf{A}^a$  为  $\mathbf{A}$  的伴随算子,  $\mathbf{A}^a\mathbf{A}$  是一个自伴而且正定的算子, 其本征值必为大于零的实数, 而本征模必正交, 即:

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = \delta_{mn}$$

取权函数  $w_n = \mathbf{A}\varphi_n$ , 则  $[Z]$  的元素为:

$$Z_{mn} = \langle w_m, \mathbf{A}\varphi_n \rangle = \lambda_n \delta_{mn}$$

可见,  $[Z]$  被对角化了. 算子方程的解为:

$$U = \sum_{n=1}^N \langle \mathbf{A}\varphi_n, f \rangle \lambda_n^{-1} \varphi_n$$

#### IV. 双正交模技术 (Biorthogonal Modes: BOM)

BOM<sup>[8]</sup> 较 CM 和 OM 而言, 在计算方法上要简便一些. 取基函数  $\{\varphi_n\}$  与权函数  $\{w_m\}$  分别为下列本征值问题中的本征函数

$$\begin{cases} \mathbf{A}\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \\ \mathbf{A}^a w_n = \mu_n w_n \end{cases}$$

由数学理论, 他们的本征值应互为共轭, 而本征函数应有双正交关系 (即双正交模), 即:

$$\begin{cases} \lambda_n = \mu_n^* \\ \langle w_m, \varphi_n \rangle = \delta_{mn} \end{cases}$$

$[Z]$  的元素被对角化:

$$Z_{mn} = \langle w_m, \mathbf{A}\varphi_n \rangle = \mu_n \delta_{mn}$$

故算子方程的解为:

$$U = \sum_{n=1}^N \langle w_n, f \rangle \mu_n^{-1} \varphi_n$$