

第 7 章 测度不变方程法

MEI(Measured Equation of Invariance) 方法是近年来在电磁场数值计算领域出现的一种新方法. 它最早是为解决无限区域电磁散射问题的边界截断而出现的, 首先由梅冠香 (MEI, Kenneth Kwai-Hsiang) 于 1992 年提出 [32]. MEI 方法显著降低了运算量, 使得原先需要超级计算机解决的电大尺寸问题, 在恰当应用 MEI 方法后可以用个人计算机加以解决.

7.1 基本思想

我们已经知道, 频域下电磁场问题可以通过积分方程或微分方程手段来求解. 积分方程法可以将求解域限制在物体表面, 但它的求解矩阵是满阵. 相反地, 差分方程或有限元方法可以得到一个稀疏矩阵, 但其网格数目远大于物体体积以便应用吸收边界条件 (ABC). 结合二者的优势, 理想的情况是将有限差分方法的网格边界限制在目标表面. MEI 方法即是一种趋近于这种理想情况的概念.

V. 差分方程

考虑如图 7.1 的简单二维散射问题. 入射场可以是 TE 波或 TM 波. 待求解的微分方程是

$$(\nabla^2 + k^2)\varphi(\mathbf{r}) = 0 \quad (7.1)$$

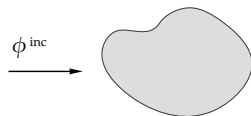


图 7.1 二维散射体

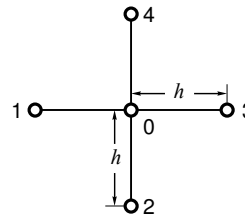


图 7.2 有限差分格式

其中 $\varphi(\mathbf{r})$ 是散射场. 式 (7.1) 的解可以通过求解有限差分或有限元方法求解. 利用图 7.2 所示的典型五点差分格式, 若 h 足够小, 可建立有限差分方程

$$\varphi_1 + \varphi_2 - (4 - k^2 h^2)\varphi_0 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0 \quad (7.2)$$

若以下表述成立, 我们可以用有限差分来近似表示微分方程:

每个有限差分方程代表了某节点与其临近节点之间的线性方程, 其关系为

1. 与节点位置无关;
2. 与散射体几何形状无关;
3. 与激励场无关.

以上特征同样适用于有限元方程.

VI. 三点假设

Mei 提出了关于节点处的场与其 $n - 1$ 个直接相邻节点处的场存在的线性关系的假设:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi_i = 0 \quad (7.3)$$

式中 φ_0 表示要研究的节点 0 处的场, $\varphi_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$ 表示其第 i 个相邻节点处的场. a_i 是待定系数, 称为 MEI 系数.

虽然此方程与离散的微分方程具有相同的解, 但却

1. 与节点位置有关;
2. 与特定几何形状有关;
3. 与激励场无关.

其中第 1 和第 2 点假设与有限差分或有限元方程不同. 第 3 点保证了所有 MEI 系数可以从 $n - 1$ 个线性无关的解中得出. 第 2 点假设同时表明, 用于求解系数的解应与特定几何形状相关. 如果节点 0 位于截断边界上, 一旦系数 a_i 得以确定, 方程 (7.3) 就是一种局部化的截断边界条件.

如果把 MEI 方程看成是网格截断边界上散射场所要满足的边界条件, 并结合网格的差分方程, 就能求解整个网格区域内的散射场问题. 由于 MEI 方程只考虑了边界节点与其周围节点之间的关系, 仍是局部代数方程. 因此 FD-MEI 方程仍保持了很好的稀疏性.

VII. 测度

为了求解 MEI 系数, 需要假设一些特定解, 称为“测度函数”, 通过将测度函数代入 (7.3) 得到的方程称为测度. 获得 n 个节点的测度方程, 至少需要 $n - 1$ 个测度.

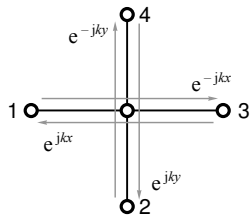


图 7.3 正交反向平面波作为测度函数

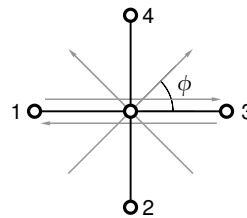


图 7.4 四个向上方向的平面波作为测度函数

在五点格式上使用四个平面波作为测度函数, 如图 7.3 所示. 测度为

$$\begin{cases} a_1 e^{jkh} + a_2 + a_0 + a_3 + a_4 e^{-jkh} = 0 \\ a_1 e^{-jkh} + a_2 + a_0 + a_3 + a_4 e^{jkh} = 0 \\ a_1 + a_2 e^{-jkh} + a_0 + a_3 e^{jkh} + a_4 = 0 \\ a_1 + a_2 e^{jkh} + a_0 + a_3 e^{-jkh} + a_4 = 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

由对称性可知, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, 不妨假定 $a_1 = 1$, 于是得到

$$a_0 = -2 - (e^{jkh} + e^{-jkh}) \quad (7.5)$$

a_0 的二阶近似即得到与式 (7.2) 相同的有限差分方程. 这一点很容易理解, 原因是这样的测度方程既与位置无关也与几何形状无关.

若仅采用向上的平面波作为测度函数, 如图 7.4 所示, 则可得到测度:

$$\begin{cases} a_1 e^{jkh} + a_2 + a_0 + a_3 + a_4 e^{-jkh} = 0 \\ a_1 e^{-jkh} + a_2 + a_0 + a_3 + a_4 e^{jkh} = 0 \\ a_1 e^{jkh/\sqrt{2}} + a_2 e^{jkh/\sqrt{2}} + a_0 + a_3 e^{-jkh/\sqrt{2}} + a_4 e^{-jkh/\sqrt{2}} = 0 \\ a_1 e^{-jkh/\sqrt{2}} + a_2 e^{jkh/\sqrt{2}} + a_0 + a_3 e^{jkh/\sqrt{2}} + a_4 e^{-jkh/\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

假定 $a_1 = a_4 = 1$, 可得到系数

$$\begin{cases} a_0 = -2 \cos kh = (k^2 h^2 - 2) + O(h^4) \\ a_2 = -a_3 = \frac{\cos \frac{kh}{\sqrt{2}} - \cos kh}{j \sin \frac{kh}{\sqrt{2}}} = \frac{kh}{j2\sqrt{2}} + O(h^3) \end{cases} \quad (7.7)$$

图 7.5 表现了代入不同方向入射的平面波时, 本测度方程的余量. 很明显, 对于向上方向的入射波余量较小, 计算精度较高.

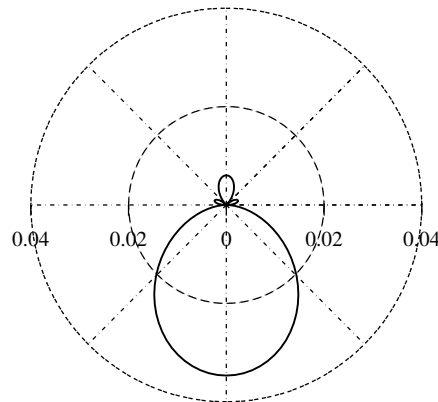


图 7.5 图 7.4 的平面波作为测度函数时, 测度方程对不同角度入射波产生的余量

VIII. 测度子

要在物体表面选择一些可能的电流分布 $J_k(\mathbf{r}')$, $k = 1, 2, \dots, M$, 即测度子 (metron). 通过这些测度子的积分可以得到由它们所产生的散射场, 称为测度函数:

$$\varphi^k(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') J_k(\mathbf{r}') d\Gamma' \quad (7.8)$$

其中 \mathbf{r} 为节点的位置矢量, \mathbf{r}' 为测度子的位置矢量, Γ 是环绕散射体表面的曲线. 注意到测度子并非基函数. 其唯一作用就是用来生成测度方程, 故对于测度子或其组合与实际电流密度是否相似并无要求. $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -j/4H_0^{(2)}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ 为二维空间格林函数. 若假设 3 成立, 则几乎可在任意位置截断有限差分网格. 将这 M 个 metron 得到的测度函数分别代入式 (7.3) 式中, 就能得到 M 个关于 MEI 系数的方程:

$$\sum_{i=0}^N a_i \varphi^k(\mathbf{r}_i) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad M \leq N \quad (7.9)$$

在 $N + 1$ 个 MEI 系数中只有 N 个是独立的, 剩下的一个可任意取值, 不妨令 $a_0 = -1$, (7.9) 式就能写成一个关于 MEI 系数的线性方程组, 可以表示为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{1,2} & \cdots & \varphi_{1,N} \\ \varphi_{2,1} & \varphi_{2,2} & \cdots & \varphi_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{M,1} & \varphi_{M,2} & \cdots & \varphi_{M,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{1,0} \\ \varphi_{2,0} \\ \vdots \\ \varphi_{M,0} \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

求解上述矩阵, 可以得到该节点对应的一组 MEI 系数.

在式 (7.9) 中, 测度子的数目可以大于 MEI 系数的数目 (即 $M > N$), 此时可以用常规的最小二乘法确定一组最佳的 MEI 系数. 在实际的计算过程中, 通常取 $M \approx 2N$ 进行计算. 确定 MEI 系数之后, 对于网格最外层上的节点就可以列出 MEI 方程. MEI 方程一旦建立, 截断边界上的边界条件就已经确立, 在截断边界和物体表面边界之间填充有限差分网格, 就可以建立一个求解散射场的稀疏矩阵方程, 称之为 FD-MEI 方程.

以二维散射体为例, 对于网格内部的节点列出经典的差分方程, 而对于物体表面上的节点则运用理想导体表面边界条件, 即可建立所有网格节点散射场的 FD-MEI 方程组, 并利用某种稀疏算法快速求解.

选择测度子时, 首先不能选择那些明显不能产生所求场的源分布, 其次源分布间不能近似线性相关. 一般为了方便起见, 可以选择正弦函数, 但这种选择并非对于任何问题都是最好的.

7.2 理论证明

自最开始提出这一理论起时, MEI 方程对入射场的不变性只是作为一种假设被提出来, 因此也有学者对此表示怀疑, 引起了相当大的争议. 但是这一假设得到了理论上的证明 [54], 即 MEI 方程对于入射场确实具有不变性, 但其精确成立的条件是方程中的节点数目 N 须趋向于无穷大. 证明过程如下

以 TM 波入射时理想导体圆柱的散射为例, 如图 7.6 所示, 散射场的纵向电场分量 φ 为

$$\varphi = -j\omega\mu_0 \int_{\Gamma} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J_z(\mathbf{r}') d\Gamma' \quad (7.11)$$

为了在网格截断边界上, 节点 0 处导出上式的离散形式, 将 J_z 用定义在柱体表面上的一系列完备基函数 ($f_n(\mathbf{r}'), n = 1, 2, \dots$) 展开:

$$J_z(\mathbf{r}') = \sum_{n=1}^N c_n f_n(\mathbf{r}') \quad (7.12)$$

其中 c_n 是电流展开系数. 在 N 为无穷大时, 此表达式为精确. 将式 (7.12) 代入 (7.11), 于是有

$$\varphi = -j\omega\mu_0 \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J_z(\mathbf{r}') d\Gamma' \quad (7.13)$$

于是我们得到节点 0 出的方程

$$\varphi_0 = [b_0]^T [c] \quad (7.14)$$

其中 $[b_0]$ 和 $[c]$ 分别是列向量

$$[b_0] = [b_{1,0}, b_{2,0}, \dots, b_{N,0}]^T, \quad [c] = [c_1, c_2, \dots, c_N]^T$$

其中 $b_{n,0}$ 为

$$b_{n,0} = -j\omega\mu_0 \int_{\Gamma} G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}') f_n(\mathbf{r}') d\Gamma' \quad (7.15)$$

其中 \mathbf{r}_0 是节点 0 的位置矢量. 式 (7.13) 和 (7.14) 中的 c_n 可以用 N 个节点处的 φ 值来线性表示, 这些节点编号为 1 至 N 并直接与 0 节点相邻. 节点 0 处式 (7.11) 的离散形式也可以如此导出, 再次在 N 个节点处应用式 (7.13) 得到

$$\varphi_m = \sum_{n=1}^N b_{n,m} c_n, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (7.16)$$

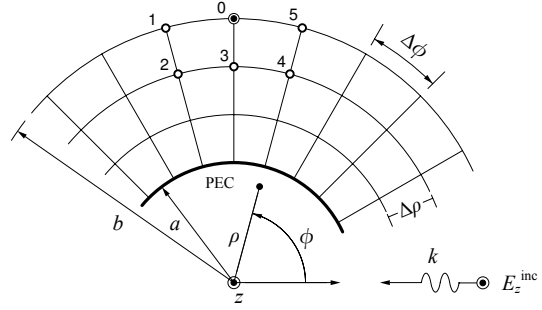


图 7.6 MEI 方法分析圆柱导体散射

其中 φ_m 是节点 m 处 φ 的值, $b_{n,m}$ 定义如式 (7.15), 只是 \mathbf{r}_0 被替换为 \mathbf{r}_m , 即节点 m 处的位置矢量. 用矩阵形式表示 (7.16) 为

$$[\varphi] = [B]^T [c] \quad (7.17)$$

其中 $[\varphi]$ 为列向量 $[\varphi] = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]^T$, $[B]$ 为 N 阶方阵 ($b_{n,m}, n, m = 1, 2, \dots, N$). 由式 (7.17) 可以得到 $[c] = \{[B]^T\}^{-1}[\varphi]$, 代入式 (7.14) 可以得到节点 0 处式 (7.11) 的离散形式

$$\varphi_0 = [b_0]^T \{[B]^T\}^{-1}[\varphi] = \{[B]^{-1}[b_0]\}^T[\varphi] \quad (7.18)$$

由于不同的入射场只影响到不同的展开系数集 $\{c_n\}$ 的不同, 而式 (7.18) 所表示的 φ_0 与 $\varphi_1 \sim \varphi_N$ 的线性关系是与 c_n 无关的, 因此可以证明 MEI 方程确实是对入射场具有不变性. 同时可以看出: 只有当 $N = \infty$ 时, 等式才精确成立; 当 N 为任何有限值时, 都存在残留误差. 然而, 只要 N 足够大, 就能保证 MEI 方程在近似意义上成立, 从而得到满足精度要求的解. 以往的研究多数是采用六点的 MEI 方程 (对应于 $N = 5$), 然而当需要求解电大尺寸或不规则形状物体的散射问题时, 无论网格划分有多细, 仅用 $N = 5$ 是不能达到精度要求的^[23].

7.3 时域 MEI 方法

在频域 MEI 方法得到广泛应用和研究的同时, 时域 MEI 方法的研究却因为其固有的难度而进展缓慢. 目前对它的研究还处于起步阶段. 根据 MEI 的基本原理, 把截断边界上任一节点的场 (散射场) 表示为其邻近空间节点上的场在不同时间步的线性组合, 写出与频域 MEI 方法的形式类似的时域测试方程, 通过选择合适的测试子完成对时域 MEI 方程的测试, 建立起时域 MEI 方法 (吸收边界条件)^[56].

常用的 FDTD 方法在分析辐射问题时, 往往需要将吸收边界条件设置得远离天线以获得较好的吸收性能, 而这将带来较大的内存开销和较长的计算时间. 传统 MEI 方法求解问题多在频域内, 最近 MEI 方法应用在时域中和 FDTD 结合起来形成了 TDMEI 方法^[53].

7.3.1 基本原理

考察 Mur 一阶吸收边界条件 (Mur-ABC), 它在二维情形下于 $+x$ 方向边界上的形式为

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\varphi = 0 \quad (7.19)$$

其中 φ 为波函数, $\tau = vt$, $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$.

在如图 7.7 所示节点分布中, 点 0 为边界节点, 点 1 为紧邻边界的内部节点. 我们在点 0 和点 1 的中心点 A , 时刻 $(n + \frac{1}{2})\Delta T$, 以中心差分方式离散 Mur-ABC 式 (7.19), 有

$$\varphi_0^{n+1} = a_1\varphi_1^{n+1} + a_2\varphi_0^n + a_3\varphi_1^n \quad (7.20)$$

其中

$$a_1 = -\frac{\Delta x - \Delta \tau}{\Delta x + \Delta \tau}, \quad a_2 = \frac{\Delta x - \Delta \tau}{\Delta x + \Delta \tau}, \quad a_3 = 1$$

Δx 为空间步长, $\Delta \tau$ 为归一化时间步长, 波函数 φ 上标表示时间步, 下标表示空间位置节点.

显然不论边界条件式 (7.19) 或者其离散形式 (7.20) 都是全域性的. 不论在哪个边界网格都是成立的并且与散射体的具体形状无关也与激励无关.

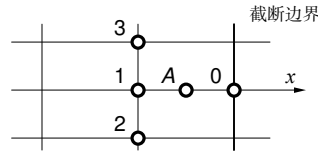


图 7.7 二维截断边界

根据 MEI 的基本原理, 在任一截断边界节点上的场 (散射场) 均可表示为其邻近节点上的场的线性组合. 那么, 在时域情况下, 这种线性组合显然还应包括时间信息, 即对图 7.7 中的任一截断边界节点 (此时并不限于是 $+x$ 轴方向的边界节点), 比如点 0, 我们可以写出其类似如下形式的测试方程:

$$\varphi_0^{n+1} = a_1 \varphi_1^{n+1} + a_2 \varphi_0^n + a_3 \varphi_1^n + a_5 \varphi_2^n + a_6 \varphi_3^{n+1} + a_7 \varphi_3^n \quad (7.21)$$

显然上式写法不是唯一的. 仿照 Mur 吸收边界条件的一阶形式可以假定时域一阶 MEI 吸收边界条件具有一种较简单的形式

$$\varphi_0^{n+1} = a_1 \varphi_1^{n+1} + a_2 \varphi_0^n + a_3 \varphi_1^n \quad (7.22)$$

即它只与该节点本身上个时刻的值及其相紧邻的空间内格点的这两个时刻的值有关.

虽然在形式上一阶 MEI 吸收边界条件 (7.22) 式与 Mur 一阶吸收边界条件 (7.19) 是一样的, 但本质上是截然不同的. 根据 MEI 的基本原理 (2), MEI 吸收边界条件式 (7.23) 系数 a_i , ($i = 1, 2, 3$) 是局域性的; 其次 a_i , ($i = 1, 2, 3$) 与具体的散射体几何形状有关, 即针对不同的散射体的不同的边界格点 a_i 具有不同的值. 同时根据 MEI 的基本原理 (3) 可知 a_i 与具体的激励无关. 这样通过 MEI 测试, 就可给出数值解.

7.3.2 MEI 系数的测试

在二维情形中, 要完成对方程 (7.22) 的测试, 我们可以根据具体问题设置一组测试子, 即线电流源 $I_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, N$), 对某截断边界点的测试即是在不同时刻 (或时刻段) 求出由这组线电流源在该点所产生的辐射场, 并将之代入式 (7.22), 形成线性方程组, 解出该点的 MEI 系数 a_i , ($i = 1, 2, 3$). 在某个空间位置放置激励源后, 可以针对图 7.7 的边界节点 0, 求出四个时刻

的辐射场, 代入到式(7.22)中, 得到如下的三个线性方程:

$$\begin{cases} a_1\varphi_1^{m+1} + a_2\varphi_0^m + a_3\varphi_1^m = \varphi_0^{m+1} \\ a_1\varphi_1^{m+2} + a_2\varphi_0^{m+1} + a_3\varphi_1^{m+1} = \varphi_0^{m+2} \\ a_1\varphi_1^{m+3} + a_2\varphi_0^{m+2} + a_3\varphi_1^{m+2} = \varphi_0^{m+3} \end{cases} \quad (7.23)$$

解出上式中的未知量 a_i , 即是测试出了 MEI 系数, 将它们反代回式 (7.22), 就是关于点 0 的 MEI 吸收边界条件. 对于其它边界点, 可以用同样的求解过程获得其 MEI 系数.

当然, 由三个方程 (7.22) 是可以得到三个未知量的唯一解. 但这种 MEI 系数代入到具体的电磁边值问题中并不能得到理想的场解, 其精度常常很低甚至是发散的. 这说明方程组 (7.22) 所求出的 MEI 系数精度是不够的, 或者说其包含的时间信息量是不够的. 那么就应该计算更多时刻的场值 (比如说 $M + 1$ 个时刻), 从而得到 M 个线性方程. 时域内的 MEI 测度方程通常可以表示为

$$\sum_{j \in S} \sum_{m \in T_j} a_{j,m} \varphi_j^m = 0 \quad (7.24)$$

其中 $T(j)$ 是一系列时间步 $\{n + 1, n, n - 1, n - 2, \dots\}$, S 是一组靠近截断边界的场点, φ_j^m 为场值, $a_{j,m}$ 为一系列测度函数 $\{\varphi_j^m\}$ 得到的 MEI 系数.

在某种节点方式下, 写为矩阵形式, 有

$$[\varphi][a] = 0 \quad (7.25)$$

其中,

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \varphi_i^{n_1+1} & \varphi_{i-1}^{n_1+1} & \varphi_i^{n_1} & \varphi_{i-1}^{n_1} & \varphi_i^{n_1-1} & \varphi_{i-1}^{n_1-1} \\ \varphi_i^{n_2+1} & \varphi_{i-1}^{n_2+1} & \varphi_i^{n_2} & \varphi_{i-1}^{n_2} & \varphi_i^{n_2-1} & \varphi_{i-1}^{n_2-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_i^{n_M+1} & \varphi_{i-1}^{n_M+1} & \varphi_i^{n_M} & \varphi_{i-1}^{n_M} & \varphi_i^{n_M-1} & \varphi_{i-1}^{n_M-1} \end{bmatrix}, \quad [a] = \begin{bmatrix} -1 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}$$

由这 M 个测试方程组成的方程组可以运用最小二乘法来求得 MEI 系数 $[a]$. 采用奇异值分解方法可以完成对相关性强弱的线性方程组的求解.

通过以上的处理过程, 我们就完成了对任意截断边界格点的一阶 MEI-ABC 的测试过程. 更一般地, 我们可以把时域 MEI-ABC 的确立和求解过程总结为:

- (1) 写出截断边界格点的 MEI 方程 (例如式 (7.22));
- (2) 确定测试子并尽可能给出解析表达式;

(3) 计算步骤 (1), 所涉及的空间格点在不同时间步的测试函数, 将它回代到式 (7.19) 得到关于 MEI 系数的线性方程组;

(4) 利用最小二乘法结合奇异值分解技术求出 MEI 系数.

其中只有步骤 (3) 和 (4) 是随具体的散射 (辐射) 问题不同而需重新计算, 步骤 (1) 和 (2) 一般可以不变.

7.4 表面 MEI 方法

1998 年, 一种直接离散标量波方程, 以直接在物体表面上获得测度不变方程的方法被提出, 称为 On-surface MEI (OSMEI) 方法 [30]. 相对于传统方法, OSMEI 可以获得与矩量法相同的最少未知数数量, 而其矩阵是一个循环稀疏矩阵, 所以 OSMEI 是一种非常有效的快速算法, 其缺陷在于精度较低.

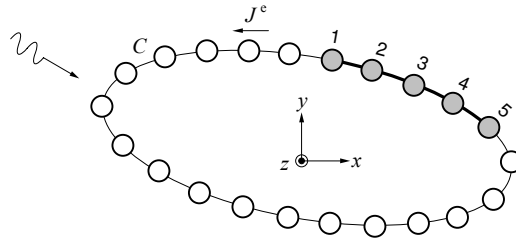


图 7.8 OSMEI 方法计算理想导体散射的网格

考虑理想导体的圆柱散射体, 如图 7.8 所示. 圆柱体沿 z 轴放置, $x-y$ 平面内截面边界为 C . 入射波为 TM 或 TE 波, 用 E_z 或 H_z 表示. 首先将散射场的下列标量波方程离散化:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{\partial^2}{\partial l^2} + k^2 \right) \begin{Bmatrix} E_z^s \\ H_z^s \end{Bmatrix} = 0 \quad (7.26)$$

其中 n 为表面法向, l 为表面切向. 对式 (7.26) 中的二阶切向微分可以离散为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial l^2} + k^2 \right) \begin{Bmatrix} E_z^s \\ H_z^s \end{Bmatrix} \approx \sum_{i=1}^N \begin{Bmatrix} b_i^c E_{zi}^s \\ a_i^m H_{zi}^s \end{Bmatrix}, \quad N \geq 3. \quad (7.27)$$

式 (7.26) 中的二阶法向微分可以离散为

$$\frac{\partial^2}{\partial n^2} \begin{Bmatrix} E_z^s \\ H_z^s \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial n} \begin{Bmatrix} \partial E_z^s / \partial n \\ \partial H_z^s / \partial n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -j/(k\eta) \\ j\eta/k \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial n} \begin{Bmatrix} E_l^s \\ H_l^s \end{Bmatrix} \approx \sum_{i=1}^N \begin{Bmatrix} a_i^c H_{li}^s \\ b_i^m E_{li}^s \end{Bmatrix} \quad (7.28)$$

在 (7.28) 中, 我们将 $H_l^s(E_l^s)$ 的 $\partial/\partial n$ 由 $H_l^s(E_l^s)$ 及近场来近似. 将式 (7.27) 和 (7.28) 代

入 (7.26), 我们得到 on-surface 测度不变方程:

$$\sum_{i=1}^N \begin{Bmatrix} a_i^e H_{li}^s \\ a_i^m H_{zi}^s \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^N \begin{Bmatrix} b_i^e E_{zi}^s \\ b_i^m E_{li}^s \end{Bmatrix} = 0 \quad (7.29)$$

式 (7.29) 称为 MEI 方程. 其中 TM 系数 $\{a_i^e\}$ 和 $\{b_i^e\}$ 和 TE 系数 $\{a_i^m\}$ 和 $\{b_i^m\}$ 统称为 MEI 系数. 其中仅有 $(2N - 1)$ 个系数是独立的. 通过 E_z^s 、 H_l^s 、 H_z^s 和 E_l^s , 可以数值求解上述 MEI 系数.

对于 TM 情况,

$$E_z^s(\mathbf{r}) = -\frac{k\eta}{4} \int_C J_z(\mathbf{r}') H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dl' \quad (7.30)$$

$$H_l^s(\mathbf{r}) = -j \frac{\omega\mu}{k^2} \frac{\partial E_z^s}{\partial n} = -\frac{1}{4j} \int_C J_z(\mathbf{r}') \frac{\partial H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n} dl' \quad (7.31)$$

对于 TE 情况,

$$\begin{aligned} H_z^s(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4j} \int_C [\mathbf{i}_z \cdot \nabla' J(\mathbf{r}')] H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dl' \\ &= \frac{1}{4j} \int_C \frac{\partial J_l(\mathbf{r}')}{\partial n'} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dl' = \frac{1}{4j} \int_C J_{\text{eq}} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dl' \end{aligned} \quad (7.32)$$

$$E_l^s(\mathbf{r}) = \frac{\omega\mu}{k^2} \frac{\partial H_z^s}{\partial n} = \frac{\eta}{4k} \int_C J_{\text{eq}}(\mathbf{r}') \frac{\partial H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n} dl' \quad (7.33)$$

其中 k 为波数, $J_z(\mathbf{r}')$ 是 TM 波激励的表面电流, $J_{\text{eq}}(\mathbf{r}') = \partial J_l(\mathbf{r}')/\partial n'$ 是 TE 激励的等效磁流. J_z 和 J_{eq} 都称为测度子, 一般取作

$$J(l') = \exp(j2\pi n l'/L), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.34)$$

其中 L 是散射体的周长, l' 是 C 上的源点.

将式 (7.30) ~ (7.33) 代入 (7.29), 可以证明 TM 波和 TE 波激励下的 MEI 方程是相同的, 也即 $\{a_i^e\} = \{a_i^m\}$, $\{b_i^e\} = \{b_i^m\}$. 故我们只需求取一套 MEI 系数 $\{a_i\}$ 和 $\{b_i\}$. 利用式 (7.29) 以及每个节点上的边界条件, 我们最后可以得到矩阵方程:

$$[A] \mathbf{H}_l^s = [B] \mathbf{E}_z^{\text{in}}, \quad \text{for TM} \quad (7.35)$$

$$[A] \mathbf{H}_z^s = [B] (j\eta/k) \partial \mathbf{H}_z^{\text{in}} / \partial n, \quad \text{for TE} \quad (7.36)$$

其中 $[A]$ 和 $[B]$ 是循环条带矩阵, 带宽为 N , \mathbf{E}_z^{in} 和 \mathbf{H}_z^{in} 是实际入射波, \mathbf{H}_l^s 和 \mathbf{H}_z^s 分别是未知的磁场分量.

7.5 MEI 方法的一些新发展

测度不变方程的用途很广,可用于有限差分法和有限元法适用的所有场合. K. K. Mei 等用 MEI 法进行了传输线特性阻抗的提取,二维导体柱和介质柱体的散射分析,波导不连续性分析,微带天线和导体平板的散射分析和简单三维导体的散射分析^[32]. 根据假设 3) 和等效原理,洪伟等更在其基础上发展了所谓“GIMEI”^[20],即用一“measureloop”将所有导体包围起来,同时也作为介质分界面的截断边界. 网格边界截断于 measure loop 外 2、3 层网格处,并假设 loop 外为自由空间. 测度子取在 measure loop 上而不是导体表面,这样就在一定程度上摆脱了对几何结构的依赖. 他们用这种方法计算了多层介质多导体互连线的分布电容矩阵和简单三维导体的电容. 作者还对散射问题提出了迭代 MEI (iterative MEI) 方法^[25,26],即为了在网格边界取得较近(导体外 2 层网格)时还能较精确求解,将前次以传统 MEI 方法求得的场值用边界条件转换成表面电流再作为下次求解的测度子. 这样的迭代能很快收敛.