

第 8 章 谱域方法

8.1 基本概念及其应用简介

谱域方法在电磁理论中有十分广泛的应用. 这种方法最早是在 Fourier 分析的基础上发展起来的. 例如, 对于一个周期的时间信号, 可以把它展开成包含不同频率的 Fourier 级数, 不同的频率分量对应于不同的幅度, 这就构成了周期函数的频谱; 对于非周期信号, Fourier 级数可以推广为 Fourier 积分相应的谱也就变成了连续谱. 这种做法也可以用到空域中. 对一个空间函数进行 Fourier 分析, 其物理概念可以理解为用频率相同而振幅和相位不同的平面波来叠加出一个给定的空间分布. 每一个平面波叫做平面波谱, 一般情况下这是一个复谱. 这种平面波的叠加, 数学上相当于 Fourier 变换. 柱面波也可以用来叠加出一个给定的空间分布, 这在数学上相当于 Hankel 变换. 平面波、柱面波和球面波是可以互相表示的, 这样做就给处理各种不同的边值问题带来不少简化和灵活性, 这可以用平面边界为例来说明这一点. 例如在求解位于平面边界上的偶极子的辐射场时, 由于点源辐射的是球面波, 而边界是平面, 这样的边值问题难以求解, 但是如果把球面波展开成平面波或者展开成柱面波, 这时由于在同一平面上, 不论平面波或是柱面波都有相同的反射系数, 因而在由这些波谱所构成的谱域中, 匹配边界条件就要容易得多. 所付出的代价是, 回到空域时, 要做反变换, 或者做谱域积分. 谱域量和空域量之间的转换可以通过 Parseval 定理来进行. 根据具体问题, 有些计算可在谱域中进行, 也有一些可以在空域中进行, 这也是谱域方法所具有的一种灵活性.

上面所说的谱域方法是一种积分变换的方法, 这实际上是一种线性的谱分解, 这是因为积分变换中都是线性运算. 近来, 又发展起来了非线性谱分解 (在信号处理领域中是根据实际测量值确定信号的数量特性, 因而常用的术语是谱估计), 与线性谱分解相比较, 非线性谱分解有许多优点. 考察一个 Fourier 级数, 它的谱也就是各次谐振频率, 它们都是所截断的最高谐振频率的谐频. 但是, 实际上叠加出一个波形的谱并不一定是这样一种谐频相关的关系, 这就存在着实际谐振频率和 Fourier 谐振频率之间的失配. 如果不用 Fourier 级数, 而用另外一个级数采取非线性方法, 例如非线性优化的方法去逼近一个给定的函数, 就可以避免这种失配. 这也就是非线性谱分解的概念. 我们应注意到, 在电磁理论和信号处理理论中, 都会遇到谱分解的问题, 它们的数学模型非常相似, 因而有关的技术可以相互借用.

谱域方法应用的范围很广, 它可以用来解决电磁场边值问题, 也可以用在天线的近场测量和诊断等场合, 或是分层介质问题的处理, 以及求解散射问题或 Weiner-Hopf 几何结构的某些问题.

将谱域法应用于天线问题分析, 由天线的口径场分布, 通过 Fourier 变换, 可得到它的平面波谱, 而平面波谱包含有远场信息, 从而可求得天线的远区辐射方向图; 或通过其反变换, 由远区辐射方向图反演近场信息, 为微波天线问题的计算提供了极大的方便^[58].

8.2 频率选择表面的分析

8.2.1 频率选择表面

频率选择表面 (FSS) 最初的应用是在抛物面天线上, 随着隐身技术发展的要求, FSS 被引入到吸波材料中. 吸波材料是一种重要的军事隐身功能材料, 其作用是减少或消除雷达、红外线等对目标探测的可能性, 是实现武器装备隐身的重要手段之一, 其开发和应用在隐身技术发展中占有重要的地位.

吸波材料的基本原理是通过某些物理作用机制将电磁波能量转化为其它形式运动的能量, 并通过该运动的耗散作用转化为热能. 电磁波可能激发的一切形式的有耗运动皆可成为吸波机制. 常见的作用机制有电感应、磁感应、电磁感应、电磁散射等. 实际应用的材料中常常可能有多种机制起作用.

当频率选择表面 (FSS—Frequency Selective Surface) 覆盖于介电或金属物体表面时, 会对入射到其上的电磁波产生频率上的特殊效应. 这种特殊的平面电磁材料, 是一种对频率反应作过特殊设计和精密分析的电磁复合材料. 通常的作法是由大量导体贴片单元 (带阻型) 或导体屏周期性开孔单元 (带通型) 组成的二维周期性阵列结构当入射电磁波频率在单元的谐振频率上时, FSS 呈现出全反射 (带阻型) 或全透射 (带通型), 其它频率的电磁波可透过 FSS (带阻型) 或被全反射 (带通型). FSS 通常需要由衬底支撑, 构成金属-介质光子带隙材料. 通过合理设计, 如将多屏 FSS 级联可实现精确控制电磁波的反射与传输. FSS 也可应用于如人工介质、光学和准光器件, 天线反射器的双色面和天线罩等.

对这一类结构散射特性的分析, 以往是采用模匹配法, 即首先对导电板建立积分方程, 然后将未知电流展开成正交模函数的完备集, 再用矩量法决定模系数. 对口径问题, 则是将口径场用正交模展开. 这个方法在频率较低的情况下是很有效的. 但是在带条或孔径的尺寸比较大的情况下, 例如大于两个波长, 则如果要得到精确解, 矩阵的阶数就很高, 数值计算十分费时. 即使改用高频技术, 例如几何绕射理论, 对于这样复杂的几何结构也难以对付. 但用谱域迭代法, 可以较容易地解决这一问题. 这种方法把卷积形式的积分方程变成了代数方程, 并且由于结构是周期性的, 因而变换就成为离散 Fourier 变换 (DFT). 这种变换可以用有效的快速算法即快速 Fourier 变换 (FFT) 来完成. 积分方程经过变换后所得到的代数方程, 可以用迭代法求解, 最后就可以同时解出口径场和金属片上的感应电流. 这种方法避免了计算矩阵元素和矩阵求逆, 并且迭代过程中还可以检验边界条件满足的程度. 此外, 结合变分法还可以加快迭代过程的收敛速度.

8.2.2 FSS 散射问题的建立

I. 入射场

建立 FSS 电磁散射问题的第一步是将 FSS 的散射场与 FSS 上感应的表面电流联系起来. 我们假设 FSS 无限薄, 且为孤立理想导体片. 坐标系如图 8.1a 所示, FSS 几何分布如图 8.1b 所示

[12,35].

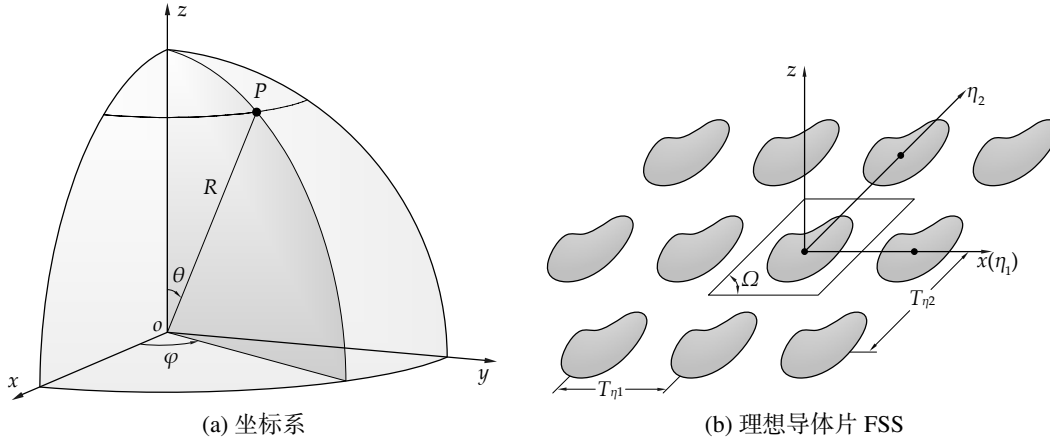


图 8.1 频率选择表面

考虑具有恒定幅度和线性相位的激励场, 其它激励场可以分解为其线性叠加. 时谐平面波激励的矢量位为

$$\mathbf{A}^i(\boldsymbol{\rho}, z) = \hat{\mathbf{z}} a^i e^{j(\mathbf{k}_0^i \cdot \boldsymbol{\rho} + \omega t)} e^{jkz \cos \theta} \quad (8.1)$$

其中

$$\mathbf{k}_0^i = \hat{\mathbf{x}} k_{x_0} + \hat{\mathbf{y}} k_{y_0} = \hat{\mathbf{x}} k \sin \theta \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} k \sin \theta \sin \varphi$$

其中 k 是介质中波数, a^i 是幅度.

II. 散射场的 Floquet 表示

设 \mathbf{J} 是 FSS 上的感应表面电流密度, \mathbf{A} 是此电流产生的磁矢量位. 一般地, 由于 FSS 的平面结构, 产生的表面电流 \mathbf{J} 仅有横向分量. 设时间参量是 $e^{j\omega t}$, 可以得到 z 坐标下 \mathbf{A} 的横向分量的与 \mathbf{J} 的表出关系:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}(\boldsymbol{\rho}', z) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\boldsymbol{\rho}' \quad (8.2)$$

或写作

$$\begin{bmatrix} A_x(x, y) \\ A_y(x, y) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{G}}(x, y) * \begin{bmatrix} J_x(x, y) \\ J_y(x, y) \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

其中, $\bar{\mathbf{G}} = \frac{\exp(-jk_0\rho)}{\rho} \bar{\mathbf{I}}$, $\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$. k_0 是自由空间波数. $*$ 表示卷积.

第二步是用矢量位 \mathbf{A} 的横向分量来表示 $z = 0$, 即 FSS 所在平面内的散射电场 \mathbf{E}^s 的横向分量, 根据

$$\mathbf{E}^s(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{j\omega\epsilon}{\nabla\nabla + k^2 \bar{\mathbf{I}}} \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}, z) \quad (8.4)$$

得到横向场分量关系为:

$$\begin{bmatrix} E_x^s \\ E_y^s \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0 & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

根据 Floquet 条件, 整个 $z' = 0$ 平面上的电流的支撑可以压缩至一个单元上, 即

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{J}}_{mn} \Psi(\boldsymbol{\rho}) \quad (8.6a)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{J}}_{mn} = \int_{\partial^s} \mathbf{J}(\boldsymbol{\rho}') \Psi_{mn}^*(\boldsymbol{\rho}') d\boldsymbol{\rho}' \quad (8.6b)$$

若 FSS 单元为矩形 ($\Omega = 90^\circ$), 则式 (8.6a) 中 m, n 次 Floquet 谐波为

$$\Psi_{mn}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{(T_{\eta_1} T_{\eta_2})^{1/2}} e^{j\mathbf{k}_{mn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (8.7)$$

对应的传播常数

$$\mathbf{k}_{mn} = \hat{x}k_{x_m} + \hat{y}k_{y_n},$$

其中

$$k_{x_m} = \frac{2\pi}{T_{\eta_1}} m + k_{x_0}, \quad k_{y_n} = \frac{2\pi}{T_{\eta_2}} n + k_{y_0}$$

则传播矢量的 z 分量为

$$k_{z_{mn}} = (k^2 - k_{x_m}^2 - k_{y_n}^2)^{1/2}$$

其中若 $k_{x_m}^2 + k_{y_n}^2 > k^2$, 应取负虚部.

利用变换对

$$\frac{e^{-jkR}}{4\pi R} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm jk_z z}}{2jk_z} e^{j\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} d\mathbf{k} \quad (8.8)$$

其中传输矢量是连续值, \pm 分别对应 $z \lesseqgtr 0$. 再利用变换对

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\mathbf{k}_{mn} - \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\rho} = \delta(\mathbf{k}_{mn} - \mathbf{k})$$

交换积分和求和次序, 代入式 (8.6a) 及式 (8.2), 得到

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{J}}_{mn} \frac{e^{\pm jk_{z_{mn}} z}}{2jk_{z_{mn}}} \Psi_{mn}(\boldsymbol{\rho}) \quad (8.9)$$

再根据 (8.4), 得到散射电场

$$\mathbf{E}^s(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{1}{2\omega\varepsilon} \sum_m \sum_n \frac{1}{2jk_{zmn}} \begin{bmatrix} k^2 - k_{x_m}^2 & -k_{x_m}k_{y_n} \\ -k_{x_m}k_{y_n} & k^2 - k_{y_n}^2 \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{mn} \Psi_{mn}(\boldsymbol{\rho}) e^{\pm jk_{zmn}z} \quad (8.10)$$

散射磁场也可类似求得

$$\mathbf{H}^s(\boldsymbol{\rho}, z) = \nabla \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}, z) \quad (8.11)$$

对于一般性的 Ω , 有

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_x^s(\alpha, \beta) \\ \tilde{E}_y^s(\alpha, \beta) \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \begin{bmatrix} k_0 - \alpha^2 & -\alpha\beta \\ -\alpha\beta & k_0 - \beta^2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} \tilde{J}_x^s(\alpha, \beta) \\ \tilde{J}_y^s(\alpha, \beta) \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{G}}(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{-j}{2(k_0^2 - \alpha^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \bar{\mathbf{I}}, & k_0^2 > \alpha^2 + \beta^2 \\ \frac{1}{2(\alpha^2 + \beta^2 - k_0^2)^{\frac{1}{2}}} \bar{\mathbf{I}}, & \text{其它} \end{cases}$$

α, β 分别是 x, y 经过 Fourier 变换后的变量. 当 FSS 是严格双周期 (无限大), 则感应电流 \mathbf{J} 的 Fourier 变换为离散值, 记为一系列谱域参量 Floquet 模式 α_{mn} 和 β_{mn} , 其精确表达式为:

$$\alpha_{mn} = \frac{2\pi m}{T_{\eta_1}} + k_0 \sin \theta \cos \varphi \quad (8.13)$$

$$\beta_{mn} = \frac{2\pi n}{T_{\eta_2} \sin \Omega} - \frac{2\pi m}{T_{\eta_1}} \cot \Omega + k_0 \sin \theta \sin \varphi \quad (8.14)$$

对式 (8.12) 做 Fourier 反变换, 并强制边界条件, 在 FSS 的导电表面处令 $\mathbf{E}^s = -\mathbf{E}^i$, 于是得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \sum_m \sum_n \begin{bmatrix} k_0^2 - \alpha_{mn}^2 & -\alpha_{mn}\beta_{mn} \\ -\alpha_{mn}\beta_{mn} & k_0^2 - \beta_{mn}^2 \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{G}}(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \begin{bmatrix} \tilde{J}_x^s(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \\ \tilde{J}_y^s(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \end{bmatrix} e^{j(\alpha_{mn}x + \beta_{mn}y)} \\ &= \sum_m \sum_n \begin{bmatrix} \tilde{G}_{xx} & \tilde{G}_{xy} \\ \tilde{G}_{xy} & \tilde{G}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{J}_x^s(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \\ \tilde{J}_y^s(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \end{bmatrix} e^{j(\alpha_{mn}x + \beta_{mn}y)} = - \begin{bmatrix} E_x^i(x, y) \\ E_y^i(x, y) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.15)$$

其中为了简化表达, $\tilde{\mathbf{G}}$ 的分量中已经包含了前面的系数等. 一旦通过解上述方程确定了感应电流, 其它我们关心的物理量, 比如反射和传输系数, 以及 FSS 的散射矩阵等都可以求出.

对于孔状的 FSS (电感性), 我们可以应用对偶原理, 用 \mathbf{H} 替换 \mathbf{E} , 并且利用 FSS 几何上的对称性, 可利用孔径上的电场 \mathbf{E}^a 定义磁流密度 \mathbf{K} :

$$\mathbf{K} = \mathbf{E}^a \times \hat{z} \quad (8.16)$$

可以得到关于 E^a 的横向分量的下列方程:

$$\frac{2}{-j\omega\mu_0} \sum_m \sum_n \begin{bmatrix} \alpha_{mn}\beta_{mn} & k_0^2 - \alpha_{mn}^2 \\ -k_0^2 + \beta_{mn}^2 & -\alpha_{mn}\beta_{mn} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \cdot \begin{bmatrix} E_x^a(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \\ E_y^a(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \end{bmatrix} e^{j(\alpha_{mn}x + \beta_{mn}y)} = \begin{bmatrix} H_x^i \\ H_y^i \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

必须指出的是, 上式仅限于理想导体 FSS. 如果 FSS 具有有限的导电率, 我们就必须采用求解 FSS 导电部分电流的方法, 而不能直接求解孔径内的场.

III. 带有介质层的 FSS

实际应用中, FSS 结构可能是 i) 嵌入在有限厚度的介质层中, ii) 印制在基片上, iii) 夹在两层介质中间. 如图 8.2 所示.

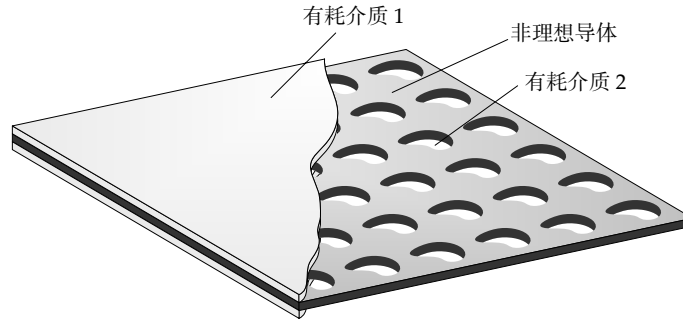


图 8.2 夹介质层的 FSS

考虑带有一层基板和一层覆盖层的情况. 为了修正前述孤立 FSS 的感应电流的算子方程, 我们简单地把 (8.15) 式中的谱域并矢格林函数用新的考虑了基板和覆盖层的格林函数替换掉. 多层介质的谱域并矢格林函数可以方便地用谱域导抗法求得.

仍然用 J_x 和 J_y 来表示表面电流, 入射场产生的表面电流方程可以表示为

$$-\begin{bmatrix} E_x^i(x, y) \\ E_y^i(x, y) \end{bmatrix} = \sum_m \sum_n \begin{bmatrix} \tilde{G}_{xx}^e & \tilde{G}_{xy}^e \\ \tilde{G}_{xy}^e & \tilde{G}_{yy}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{J}_x(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \\ \tilde{J}_y(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \end{bmatrix} e^{j(\alpha_{mn}x + \beta_{mn}y)} \quad (8.18)$$

其中

$$\begin{bmatrix} \tilde{G}_{xx}^e & \tilde{G}_{xy}^e \\ \tilde{G}_{xy}^e & \tilde{G}_{yy}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}^e \cos^2 \theta + \tilde{Z}^h \sin^2 \theta & (\tilde{Z}^e - \tilde{Z}^h) \sin \theta \cos \theta \\ (\tilde{Z}^e - \tilde{Z}^h) \sin \theta \cos \theta & \tilde{Z}^e \sin^2 \theta + \tilde{Z}^h \cos^2 \theta \end{bmatrix} \quad (8.19)$$

而

$$\tilde{Z}^{e,h} = \frac{1}{Y^{+e,h} + Y^{-e,h}}, \quad Y^{+e,h} = Y_1^{e,h} \frac{Y_1^{e,h} + Y_0^{e,h} \coth \gamma_1 t_1}{Y_1^{e,h} \coth \gamma_1 t_1 + Y_0^{e,h}}, \quad Y^{-e,h} = Y_2^{e,h} \frac{Y_2^{e,h} + Y_0^{e,h} \coth \gamma_2 t_2}{Y_2^{e,h} \coth \gamma_2 t_2 + Y_0^{e,h}},$$

$$Y_i^e = j\omega \frac{\epsilon_0 \epsilon_{ri}}{\gamma_i}, \quad Y_i^h = -\frac{\gamma_i}{j\omega\mu_0}, \quad \gamma_i = (\alpha_{mn}^2 + \beta_{mn}^2 - \epsilon_{ri} k_0^2)^{1/2}, \quad \theta = \arctan \frac{\beta_{mn}}{\alpha_{mn}}$$

入射场在导电表面的横向分量是通过在每个介质层中建立 z 方向矢量势来得到的. 在每个界面处应用适合的连续性边界条件, 就可以得到以下两个表达式, 分别代表 TE 模和 TM 模:

$$\text{TE: } \begin{bmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{bmatrix} = j(R_1 + R_2) e^{j(\alpha x + \beta y)} \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (8.20)$$

$$\text{TM: } \begin{bmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{bmatrix} = \frac{\gamma_1}{\omega \epsilon_{r1} \epsilon_0} (R_1 - R_2) e^{j(\alpha x + \beta y)} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

其中

$$R_1 = \frac{\gamma_0}{D} \frac{e^{\gamma_0 t_1}}{\sinh \gamma_1 t_1} [\bar{\gamma}_2^2 + \gamma_0 \bar{\gamma}_1 + (\gamma_0 + \bar{\gamma}_1) \bar{\gamma}_2 \coth \gamma_2 t_2] \quad , \quad \bar{\gamma}_i = \begin{cases} \gamma_i, & \text{TE} \\ \gamma_i / \epsilon_{ri}, & \text{TM} \end{cases}$$

$$R_2 = -\frac{\gamma_0}{D} \frac{e^{\gamma_0 t_1}}{\sinh \gamma_1 t_1} [\bar{\gamma}_2^2 - \gamma_0 \bar{\gamma}_1 + (\gamma_0 - \bar{\gamma}_1) \bar{\gamma}_2 \coth \gamma_2 t_2]$$

$$D = (\gamma_0 + \bar{\gamma}_1^2) \bar{\gamma}_2 \coth \gamma_2 t_2 + (\gamma_0 + \bar{\gamma}_2^2) \bar{\gamma}_1 \cdot \coth \gamma_1 t_1 + (\bar{\gamma}_1^2 + \bar{\gamma}_2^2) \gamma_0 + 2\gamma_0 \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 \coth \gamma_2 t_2 \coth \gamma_1 t_1,$$

当金属具有有限电导率时, 屏表面的总电场不再为 0, 需要对式 (8.15) 和式 (8.18) 作出修正. 对于薄导体层来说, 表面的总电场即等于表面阻抗与表面电流密度之积, 即

$$\begin{bmatrix} E_x^s \\ E_y^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{bmatrix} - Z_s \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix} = 0 \quad (8.22)$$

其中 Z_s 是无限大薄导体层的阻抗. 将式 (8.22) 代入式 (8.15) 和式 (8.18) 等即可得到处理有限电导率金属层 FSS 的方程. 对于孤立 FSS:

$$-\begin{bmatrix} E_x^i(x, y) \\ E_y^i(x, y) \end{bmatrix} = \sum_m \sum_n \begin{bmatrix} \tilde{G}_{xx} & \tilde{G}_{xy} \\ \tilde{G}_{xy} & \tilde{G}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{J}_x(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \\ \tilde{J}_y(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \end{bmatrix} \cdot e^{j(\alpha_{mn}x + \beta_{mn}y)} - Z_s \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix} \quad (8.23)$$

对于介质层中的 FSS:

$$-\begin{bmatrix} E_x^i(x, y) \\ E_y^i(x, y) \end{bmatrix} = \sum_m \sum_n \begin{bmatrix} \tilde{G}_{xx}^e & \tilde{G}_{xy}^e \\ \tilde{G}_{xy}^e & \tilde{G}_{yy}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{J}_x(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \\ \tilde{J}_y(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \end{bmatrix} \cdot e^{j(\alpha_{mn}x + \beta_{mn}y)} - Z_s \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

8.2.3 矩量法解算子方程

首先将式 (8.23) 和 (8.24) 改写为符号形式

$$\mathbf{Lu} = \mathbf{g} \quad (8.25)$$

其中 \mathbf{u} 或代表未知感应电流 \mathbf{J} 或孔径场 \mathbf{E}^a (取决于我们是求解贴片或孔径型 FSS), \mathbf{g} 对应已知的人射 \mathbf{E}^i 或 \mathbf{H}^i 场, \mathbf{L} 是算子. 首先将 \mathbf{u} 表示为一系列基函数 $\{f_i\}$

$$\mathbf{u} = \sum_i C_i f_i \quad (8.26)$$

其中 $\{C_i\}$ 是待求系数. 将 (8.26) 代入 (8.25), 并按 Галёркин 法, 选 f 为检验函数, 则 (8.25) 转化为下列矩阵方程

$$\left[f_j, \sum_i C_i \mathbf{L} f_i \right] = [f_j, \mathbf{g}], \quad j = 1, 2, \dots \quad (8.27)$$

其中标量积 $[a, b]$ 定义为

$$[a, b] = \begin{cases} \int_{\text{plate}} \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b} \, ds & \text{贴片} \\ \int_{\text{aperture}} \mathbf{a}^* \times \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{z}} \, ds & \text{孔径} \end{cases}$$

其中 \mathbf{a}^* 是 \mathbf{a} 的复共轭.

求解的效率与基函数的选择有很大关系. 选择时应当考虑以下几个方面. 第一, 为了用以表示未知电流的基函数数目最少, 使矩阵尺寸最小, 这些基函数应当满足合适的边界条件. 第二, 选择可以进行解析 Fourier 变换的基函数脚腕方便, 这样在变换域下使用算子方程 (8.23) 和 (8.24) 时就无需数值求解. 第三, 为了不用花费大量的时间来计算矩阵元素中的标量积, 基函数的变换应对较大的 α 和 β 可以较快收敛. 第四的考虑的因素是, 若精确表示未知表面电流密度或孔径场所需的基函数数目太大, 就应使用迭代而不是 Gauss 消去类的方法.

I. 全域基函数

总体来说有两类方法, 全域基和分域基. 首先考虑全域基. 一般来说, 全域基函数支撑在整个待求 FSS 单元域上, 并针对区域的特定几何形状加以定制. 例如, 对于类似偶极子、方形贴片、圆形贴片、十字、耶路撒冷十字等单元, 都已经成功地求得全域基函数. 圆环和方环也得到了深入的研究. 这些花样如图 8.3 所示.

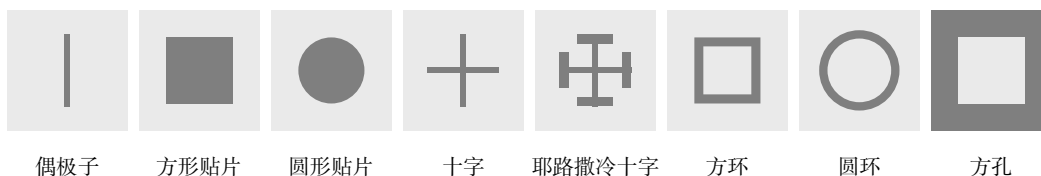


图 8.3 FSS 常见花样

采用 Галёркин 法, 对 (8.27) 采用合适的基函数和测试函数, 可得到求解未知系数 C_j 的矩阵

方程

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \int J_{xi}^* E_x^i ds \\ \int J_{yi}^* E_y^i ds \end{bmatrix} &= \sum_i \sum_m \sum_n \begin{bmatrix} \tilde{J}_{xi}^* & 0 \\ 0 & \tilde{J}_{yi}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{G}_{xx} & \tilde{G}_{xy} \\ \tilde{G}_{xy} & \tilde{G}_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{J}_{xj}(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) & 0 \\ 0 & \tilde{J}_{yj}(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{xj} \\ C_{yj} \end{bmatrix} \\ &\quad - Z_s \begin{bmatrix} C_{xj} \int J_{xi}^* J_{xj} ds \\ C_{yj} \int J_{yi}^* J_{yj} ds \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (8.28) \end{aligned}$$

一些典型的 FSS 花样的的全域基函数如下:

1. 长方形孔径或贴片

$$\begin{aligned} E_{xpq}^a &= \hat{x} \frac{T_p\left(\frac{2}{b}x\right)}{\left[1 - \left(\frac{2}{b}x\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \sin\left[\frac{q\pi}{d}\left(y + \frac{d}{2}\right)\right], & E_{yrs}^a &= \hat{y} \frac{T_s\left(\frac{2}{d}y\right)}{\left[1 - \left(\frac{2}{d}y\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \sin\left[\frac{r\pi}{b}\left(x + \frac{b}{2}\right)\right] \\ J_{xpq} &= \hat{x} \frac{T_p\left(\frac{2}{d}y\right)}{\left[1 - \left(\frac{2}{d}y\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \sin\left[\frac{r\pi}{b}\left(x + \frac{b}{2}\right)\right], & J_{yrs}^a &= \hat{y} \frac{T_s\left(\frac{2}{b}x\right)}{\left[1 - \left(\frac{2}{b}x\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \sin\left[\frac{q\pi}{d}\left(y + \frac{d}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

其中 $p, s = 0, 1, \dots, q, r = 1, 2, \dots$, T_i 是 i 阶第一类 Чебышев 函数.

2. 圆形孔径或贴片

$$\begin{aligned} E_{\rho pq}(\rho, \varphi) &= \hat{\rho} \frac{T_p\left(\frac{2}{d}\rho\right)}{\left[1 - \left(\frac{2}{d}\rho\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} e^{jq\varphi}, & E_{\varphi rs}(\rho, \varphi) &= \hat{\varphi} \left[1 - \left(\frac{2}{d}\rho\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} U_r\left(\frac{2}{d}\rho\right) e^{js\varphi} \\ J_{\varphi pq}(\rho, \varphi) &= \hat{\varphi} \frac{T_p\left(\frac{2}{d}\rho\right)}{\left[1 - \left(\frac{2}{d}\rho\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} e^{jq\varphi}, & J_{\rho rs}(\rho, \varphi) &= \hat{\rho} \left[1 - \left(\frac{2}{d}\rho\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} U_r\left(\frac{2}{d}\rho\right) e^{js\varphi} \end{aligned}$$

其中, $\rho = 0, 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots, q, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, U_r 是 r 阶第二类 Чебышев 函数.

3. 细线振子或开槽

$$J_{yp} = \hat{y} \sin \left[\frac{p\pi}{L} \left(y + \frac{L}{2} \right) \right] P_x(0, W) P_y(0, L), \quad J_x = 0$$

$$E_{yp}^a = \hat{y} \sin \left[\frac{q\pi}{L} \left(y + \frac{L}{2} \right) \right] P_x(0, W) P_y(0, L), \quad E_x^a = 0$$

其中 $p = 1, 2, \dots, q = 0, 1, 2, \dots$, 而

$$P_x(x_0, D) = \begin{cases} 1, & |x - x_0| \leq \frac{D}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad P_y(y_0, D) = \begin{cases} 1, & |y - y_0| \leq \frac{D}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

II. 分域基函数

一般来讲, 采用全域基时, 对应于 (8.28) 的矩阵尺寸不会超过 20×20 . 而精确表示电流或孔径场所需的分域基函数数目则要大出一个数量级. 此外, 除非 α_{mn} 和 β_{mn} 中的 m 和 n 很大, 分域基的 Fourier 变换收敛不是很快, 这样就需要更多的 Floquet 谐波项使之收敛. 然而, 可以通过快速 Fourier 变换方法 (FFT) 来加速收敛. 若发现式 (8.28) 的矩阵尺寸太大, 无法用传统消去法求解, 可能就需要使用迭代方法来求解^[9].

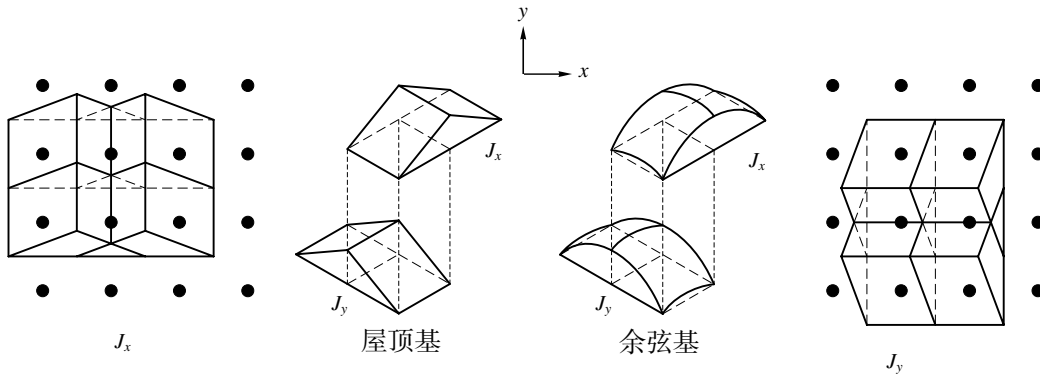


图 8.4 用以表示电流的屋顶基和余弦基函数

最常用的分域基是屋顶函数, 使得散射场可以用一个收敛的级数来表示. 如图 8.4 所示, 在垂直网格边界的方向上电流趋近于零, 而在平行网格方向上不为零. 电流的每个分段都横跨两个网格, 每个网格上至少有一个 \hat{x} 方向和一个 \hat{y} 方向的屋顶基叠加. 坐标系选择时, 采样点处在每个网格的中央.

对于孔径表面, 或在周期性单元边界上有金属跨接的结构, 可在单元边界上设置屋顶基函数, 使得电流可以跨过边界流入相邻单元. 相对边界的电流可用 Floquet 条件来约束, 所以仅取一侧即可. 考虑如式 (8.24) 中关于电流密度分布的一般问题. 若网格划分为 $M \times N$ 个节点, J_x 和 J_y

可用如下形式表示

$$J_x = \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} I_x(m, n) B_x(m, n) \quad (8.29)$$

$$J_y = \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} I_y(m, n) B_y(m, n) \quad (8.30)$$

其中 B_x 和 B_y 是分域基函数, I_x 和 I_y 是应分段对应电流元的未知幅度. 很明显, 位于贴片外的分域权重应为零.

电流基函数可以用下列方程来描述:

$$B_x(m, n) = \Lambda\left(m + \frac{1}{2}\right) \Pi(n) \quad (8.31)$$

$$B_y(m, n) = \Lambda(m) \Pi\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (8.32)$$

其中对于采用屋顶基的离散方式, 有

$$\Pi(n) = \begin{cases} 1, & |y - n\Delta y| < \frac{\Delta y}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad \Lambda(m) = \begin{cases} 1 - \frac{|x - m\Delta x|}{\Delta x}, & |x - m\Delta x| < \Delta x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

对于余弦基离散, 则有

$$\Pi(n) = \begin{cases} \cos k_0 y, & |y - n\Delta y| < \frac{\Delta y}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad \Lambda(m) = \begin{cases} \frac{\sin k_0(\Delta x - |x|)}{\Delta x \Delta y \sin k_0 \Delta x}, & |x - m\Delta x| < \Delta x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

此处 $\Delta x = t_x/M$, $\Delta y = t_y/N$.

一种较好的划分是将单元划分为 $N \times N$ 个节点, 采用等尺寸屋顶基函数. 这样的离散化就可以对算子方程中的二重积分进行 FFT.

III. 边界条件

共轭梯度法的收敛速度与方程算子的条件数直接相关. 而该条件数与施加边界条件的方式有密切关系. 此处应用电场边界条件, 该阻抗边界条件可表示为

$$\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^i - Z_s \mathbf{J}_s = 0 \quad (8.33)$$

其中 Z_s 是无限大薄阻片的波阻抗. 通过用测试函数求积分来进行检验, 式中 S 是测试函数的支撑集:

$$\int_S \mathbf{T} \cdot (\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^i - Z_s \mathbf{J}_s) ds = 0 \quad (8.34)$$

分别用 T 和 B 来代表式 (8.24) 中的测试函数和基函数, 对于屋顶基和余弦基函数, 改变积分顺序, 对应的算子方程可以改写为

$$\begin{aligned}
 - \begin{bmatrix} E_{x0} \tilde{T}_x^*(0, 0) P^*(p + \frac{1}{2}, q) \\ E_{y0} \tilde{T}_y^*(0, 0) P^*(p, q + \frac{1}{2}) \end{bmatrix} &= \left\{ \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} \begin{bmatrix} \tilde{G}_{xx}(m, n) & \tilde{G}_{xy}(m, n) \\ \tilde{G}_{yx}(m, n) & \tilde{G}_{yy}(m, n) \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. \left\{ \sum_{t=-N/2}^{N/2-1} \sum_{s=-M/2}^{M/2-1} e^{-j(k_{xs}m\Delta x + k_{yt}n\Delta y)} \begin{bmatrix} I_x(s, t) \\ I_y(s, t) \end{bmatrix} \right\} \cdot e^{j(k_{xm}p\Delta x + k_{yn}q\Delta y)} \right\} \\
 &\quad + Z_s \begin{bmatrix} F_x(p, q) & 0 \\ 0 & F_y(p, q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x(p, q) \\ I_y(p, q) \end{bmatrix} \quad (8.35)
 \end{aligned}$$

其中

$$P(m, n) = e^{-j(k_{xi}m\Delta x + k_{yi}n\Delta y)}$$

或写作

$$\begin{aligned}
 - \begin{bmatrix} E_{x0} \tilde{T}_x^*(0, 0) P^*(p + \frac{1}{2}, q) \\ E_{y0} \tilde{T}_y^*(0, 0) P^*(p, q + \frac{1}{2}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P^*(p, q) & 0 \\ 0 & P^*(p, q) \end{bmatrix} \text{FFT}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{G}_{xx}(m, n) & \tilde{G}_{xy}(m, n) \\ \tilde{G}_{yx}(m, n) & \tilde{G}_{yy}(m, n) \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. \text{FFT} \left\{ \begin{bmatrix} P(s, t) & 0 \\ 0 & P(s, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x(s, t) \\ I_y(s, t) \end{bmatrix} \right\} \right\} + Z_s \begin{bmatrix} F_x(p, q) & 0 \\ 0 & F_y(p, q) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_x(p, q) \\ I_y(p, q) \end{bmatrix} \quad (8.36)
 \end{aligned}$$

其中

$$\tilde{G}'_{xx} = -A \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{k_0^2 - k_{x_{m'}}^2}{k_{z_{n'm'}}} \tilde{B}_x(m', n') \tilde{T}_x^*(m', n') \quad (8.37a)$$

$$\tilde{G}'_{xy} = A \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{k_{x_{m'}} k_{y_{n'}}}{k_{z_{n'm'}}} \tilde{B}_y(m', n') \tilde{T}_x^*(m', n') \cdot e^{j[k_{x_{m'}}(\Delta x/2) - k_{y_{n'}}(\Delta y/2)]} \quad (8.37b)$$

$$\tilde{G}'_{yx} = A \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{k_{x_{m'}} k_{y_{n'}}}{k_{z_{n'm'}}} \tilde{B}_x(m', n') \tilde{T}_y^*(m', n') \cdot e^{-j[k_{x_{m'}}(\Delta x/2) - k_{y_{n'}}(\Delta y/2)]} \quad (8.37c)$$

$$\tilde{G}'_{yy} = -A \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{k_0^2 - k_{y_{n'}}^2}{k_{z_{n'm'}}} \tilde{B}_y(m', n') \tilde{T}_y^*(m', n') \quad (8.37d)$$

其中

$$A = \frac{\eta_0}{2k_0} \frac{\Delta x \Delta y}{t_x t_y}$$

\tilde{B} 和 \tilde{T} 分别是基函数和测试函数的 Fourier 变换. 使用 $M \times N$ FFT 时, $m' = m + rM$, $n' = n + sN$, $-N/2 \leq n \leq N/2 - 1$, $-M/2 \leq m \leq M/2 - 1$.

若定义 $\alpha = k_{x_n} \Delta x$, $\beta = k_{y_m} \Delta y$, 则对于屋顶基函数:

$$\begin{aligned}\tilde{B}_x(m, n) &= \text{sinc}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ \tilde{B}_y(m, n) &= \text{sinc}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\end{aligned}$$

对于余弦基函数:

$$\begin{aligned}\tilde{B}_x(m, n) &= \frac{k_0}{\Delta x} \frac{1}{k_0^2 - \left(\frac{\alpha}{\Delta x}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sin k_0 \Delta x} (\cos \alpha - \cos k_0 \Delta x) \cdot \left(\text{sinc} \frac{k_0 \Delta y - \beta}{2} + \text{sinc} \frac{k_0 \Delta y + \beta}{2} \right) \\ \tilde{B}_y(m, n) &= \frac{k_0}{\Delta y} \frac{1}{k_0^2 - \left(\frac{\beta}{\Delta y}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sin k_0 \Delta x} (\cos \alpha - \cos k_0 \Delta y) \cdot \left(\text{sinc} \frac{k_0 \Delta x - \alpha}{2} + \text{sinc} \frac{k_0 \Delta x + \alpha}{2} \right)\end{aligned}$$

阻抗项 F_s 是基函数和测试函数的标量积, 可以较为简便得由解析计算求得, 定义为

$$F_x(m, n) = C_1 \delta(m-1, n) + C_2 \delta(m, n) + C_1 \delta(m+1, n) \quad (8.40a)$$

$$F_y(m, n) = D_1 \delta(m-1, n) + D_2 \delta(m, n) + D_1 \delta(m+1, n) \quad (8.40b)$$

其中 Kronecker 函数 δ 定义为

$$\delta(m, n) = \begin{cases} 1, & \text{当 } m = r, n = s \text{ 时} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

s 和 r 是电流元的标号. 另外, 对于边界元素, 即 $m, n = -N/2$ 或 $N/2 - 1$, δ 函数需要作如下修正:

$$m = -\frac{M}{2} \quad \delta(m-1, n) \longrightarrow e^{jk_{x_i} t_x} \delta\left(\frac{M}{2} - 1, n\right) \quad (8.41a)$$

$$m = \frac{M}{2} - 1 \quad \delta(m+1, n) \longrightarrow e^{-jk_{x_i} t_x} \delta\left(-\frac{M}{2}, n\right) \quad (8.41b)$$

$$n = -\frac{N}{2} \quad \delta(m, n-1) \longrightarrow e^{jk_{y_i} t_y} \delta\left(m, \frac{N}{2} - 1\right) \quad (8.41c)$$

$$n = \frac{N}{2} - 1 \quad \delta(m, n+1) \longrightarrow e^{-jk_{y_i} t_y} \delta\left(m, -\frac{N}{2}\right) \quad (8.41d)$$

对于屋顶基函数和线积分测试函数, 有

$$C_1 = D_1 = \frac{1}{8} \Delta x \Delta y, \quad C_2 = D_2 = \frac{3}{4} \Delta x \Delta y \quad (8.42)$$

而对于屋顶基函数和屋顶基测试函数, 有

$$C_1 = D_1 = \frac{1}{6} \Delta x \Delta y, \quad C_2 = D_2 = \frac{2}{3} \Delta x \Delta y \quad (8.43)$$

对于屋顶基函数和余弦基函数, 计算 \tilde{G} 的无穷级数和可以进行截断. 在 $n, m \rightarrow \infty$ 时, 求和项的幅度按照下式衰减:

$$\frac{1}{mn(m^2 + n^2)^{1/2}} \quad (8.44)$$

若采用 Галёркин 方法, 该无穷级数收敛将大大加快, 其渐进形式为

$$\frac{1}{(mn)^2(m^2 + n^2)^{1/2}} \quad (8.45)$$

选用不同的基函数, 不但可以在求和时带来不同的收敛速度, 在迭代求解时也可以获得不同的收敛性.

8.2.4 场分解以及传输系数的计算

对于孤立导体单元, 可按下述方法计算传输系数. 对于介质中的 FSS, 其计算方法可参考有关文献^[35].

I. 矩形周期单元

由于表面是平面的, 我们很自然想到将场分解为 \hat{z} 向的 TE 和 TM 场, 其电势形式为

$$A_p^\pm(\rho, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{pmn}^\pm \Psi_{mn}(\rho) e^{\pm jk_{zmn}z}, \quad z \leq 0 \quad (8.46)$$

其中下标 p 代表极化. 散射常可以分解为两种极化场

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{TM}} + \mathbf{E}_{\text{TE}} = \frac{1}{j\omega\epsilon} (\nabla\nabla + k^2 \bar{\mathbf{I}} \cdot) \mathbf{A}_{\text{TM}} - \nabla \mathbf{A}_{\text{TE}} \quad (8.47a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{TM}} + \mathbf{H}_{\text{TE}} = \frac{1}{j\omega\mu} (\nabla\nabla + k^2 \bar{\mathbf{I}} \cdot) \mathbf{A}_{\text{TE}} + \nabla \mathbf{A}_{\text{TM}} \quad (8.47b)$$

由于 TE 场仅由磁场的 z 分量确定, TE 势系数 $a_{\text{TE},mn}^\pm$ 可以利用式 (8.11) 和 (8.9) 求得, 或利用 (8.47b) 代入 (8.46), 并令 $\mathbf{A}_{\text{TM}} = 0$. 类似也可得到 TM 势系数 $a_{\text{TM},mn}^\pm$. 结果为

$$a_{\text{TE},mn}^+ = \frac{-j\omega\mu}{2k_{zmn}(k_{x_m}^2 + k_{y_n}^2)} (k_{y_n} \tilde{J}_{x_{mn}} - k_{x_m} \tilde{J}_{y_{mn}}), \quad a_{\text{TE},mn}^- = a_{\text{TE},mn}^+ \quad (8.48a)$$

$$a_{\text{TM},mn}^- = \frac{-1}{2j(k_{x_m}^2 + k_{y_n}^2)} (k_{y_n} \tilde{J}_{x_{mn}} + k_{x_m} \tilde{J}_{y_{mn}}), \quad a_{\text{TM},mn}^+ = -a_{\text{TM},mn}^- \quad (8.48b)$$

通过分离表面 $z = 0$ 处的切向传输和反射电场, 可以得到传输和反射系数. 由于二维表面可

能使一种极化的能量同时散射为 TE 或 TM 极化, 同时定义同向极化和交叉极化.

同向极化:

$$T_{p,00}^{p,00} = 1 + \frac{a_{p,00}^+}{a_{p,00}^i}, \quad R_{p,00}^{p,00} = \frac{a_{p,00}^-}{a_{p,00}^i}, \quad (8.49)$$

交叉极化, 下标表示入射场, 上标表示散射场:

$$T_{TE,00}^{TM,00} = \frac{a_{TM,00}^+}{a_{TE,00}^i} \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad T_{TM,00}^{TE,00} = \frac{a_{TE,00}^+}{a_{TM,00}^i} \left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8.50a)$$

$$R_{TE,00}^{TM,00} = \frac{a_{TM,00}^-}{a_{TE,00}^i} \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad R_{TM,00}^{TE,00} = \frac{a_{TE,00}^-}{a_{TM,00}^i} \left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8.50b)$$

II. 一般情况

求出散射电场之后, 可以按下式求得传输系数:

$$T_{TM} = \frac{j\omega\varepsilon_0 E_z^i}{(k_0^2 + \gamma_{mn}^2)} \sqrt{\frac{\gamma_{mn}(k_0^2 + \gamma_{mn}^2)}{\gamma_{kl}(k_0^2 + \gamma_{kl}^2)}} N_{TM} \quad (8.51)$$

$$T_{TE} = \frac{j}{\beta_{mn}} (E_x^s + j\alpha_{mn}\gamma_{mn}E_z^s) \sqrt{\frac{\gamma_{mn}(k_0^2 + \gamma_{mn}^2)}{\gamma_{kl}(k_0^2 + \gamma_{kl}^2)}} N_{TE} \quad (8.52)$$

其中

$$E_z^i = j \frac{(\alpha_{mn}E_x^s + \beta_{mn}E_y^s)}{\gamma_{mn}}, \quad \gamma_{mn} = -j\sqrt{k_0^2 - \alpha_{mn}^2 - \beta_{mn}^2} \quad \text{或} \quad -\sqrt{\alpha_{mn}^2 + \beta_{mn}^2 - k_0^2}$$

$$N_{TM} = \begin{cases} 1 & \text{TM 波入射} \\ \eta_0 & \text{TE 波入射} \end{cases}, \quad N_{TE} = \begin{cases} 1 & \text{TE 波入射} \\ 1/\eta_0 & \text{TM 波入射} \end{cases},$$

8.3 多层介质问题

在微带电路、地质探测、遥感、电波传播、埋地天线等研究领域需要计算平面分层介质中的电磁场. 随着现代民用和军用电子设备迅速向小型化、轻量化、高可靠、多功能和低成本方向发展, 多层微波集成电路技术越来越受到重视. 于是, 多层微波结构的精确电磁仿真与设计变得越来越重要. 分层介质问题长期以来都是电磁场研究中的一个热点. 其中较重要的谱域方法包括伊藤龙男提出的谱域导抗法^[22]和方大纲等提出的离散复镜像法 (DCIM)^[11,16,52]等等. 图 8.5 所示是部分分层介质传输线的例子. 图中金色部分表示导体, 灰色和天蓝色分别表示不同的介质.

下面我们首先通过合适的电磁矢量位来导出一种通用的谱域格林函数, 将复杂的分层介质问题转化成谱域传输线模型.

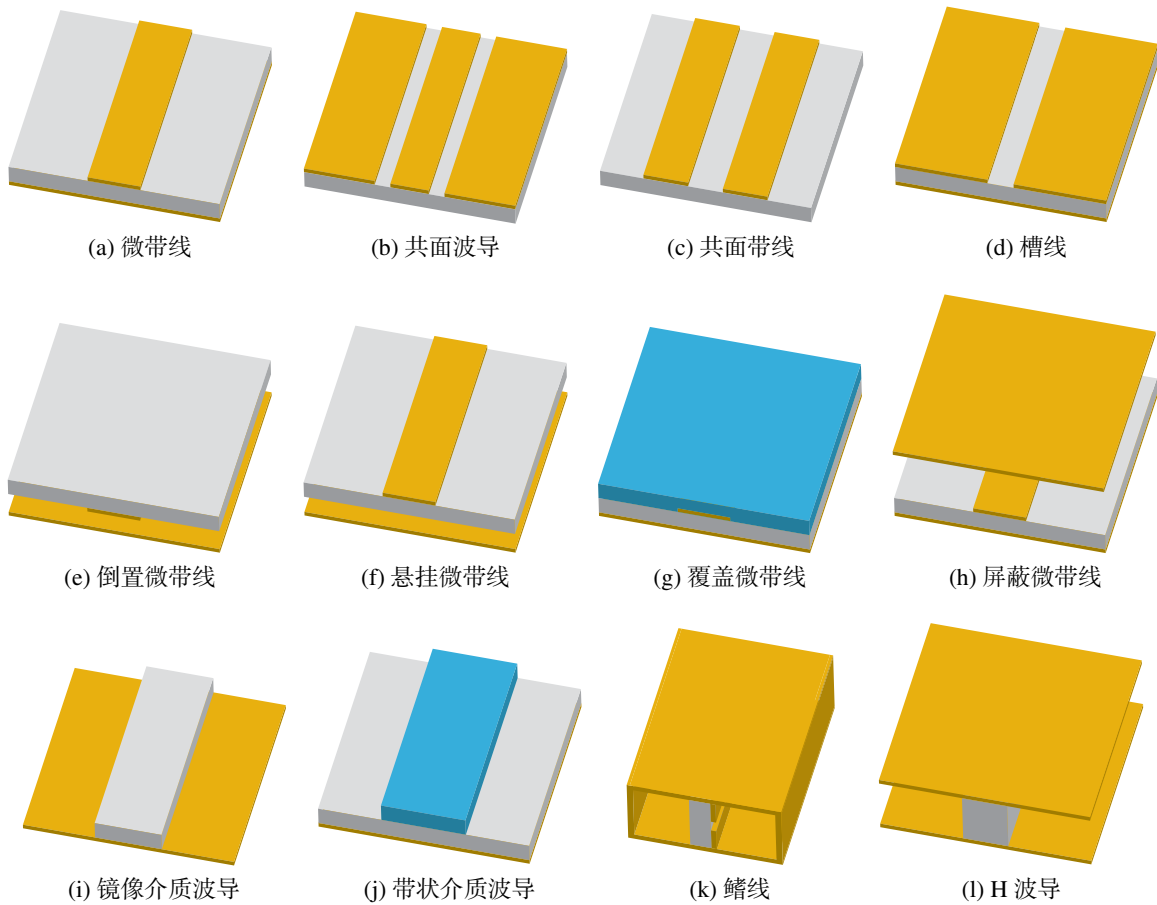


图 8.5 部分分层传输线的例子

8.3.1 多层介质的一般谱域格林函数

I. 利用电磁矢量位进行场分解

任何区域内的场都可以用电矢量位 \mathbf{F} 和磁矢量位 \mathbf{A} 完全表示^[13]. 实际上, $\{A_x, A_y, A_z, F_x, F_y, F_z\}$ 中的任意两个已经可以表示任意空间内的任意场. 对于分析如图 8.6 所示坐标系下的多层介质, 我们选用 (A_z, F_z) 来分解场. 矢量位选择为

$$\mathbf{A} = A_z(x, y, z)\hat{z} \quad (8.53)$$

$$\mathbf{F} = F_z(x, y, z)\hat{z} \quad (8.54)$$

同时设在 11 和 21 层之间, $x-y$ 平面内有任意表面电流分布, 设为

$$\mathbf{J}_s(x, y) = J_x(x, y)\hat{x} + J_y(x, y)\hat{y} \quad (8.55)$$

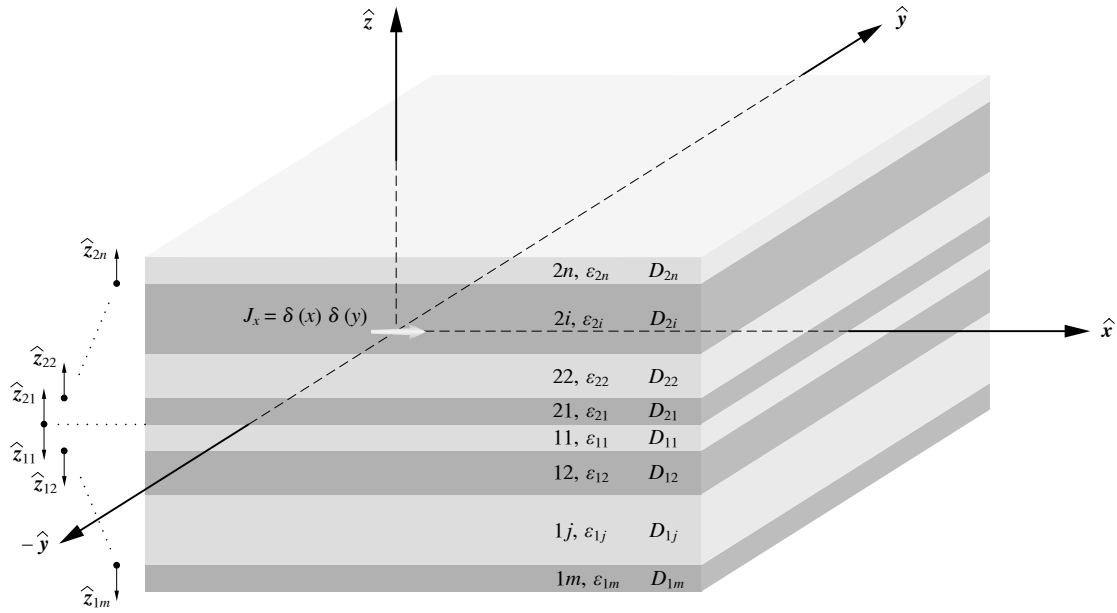


图 8.6 一般性多层介质示意图

利用相应的格林函数, 可以写出 A_z , F_z 或 \mathbf{E} , \mathbf{H} 的任意分量. 例如

$$A_z(x, y, z) = \iint_{\text{source}} [G_{A_z J_x}(x, y, z|x_0, y_0) J_x(x_0, y_0) + G_{A_z J_y}(x, y, z|x_0, y_0) J_y(x_0, y_0)] dx_0 dy_0 \quad (8.56)$$

其中格林函数可以用求解单位表面电流 $\mathbf{J}_s = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\hat{x}$ 或 $\mathbf{J}_s = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\hat{y}$ 激励下对应的场分量或矢量位来得到.

定义变换对

$$\tilde{A}_z(k_x, k_y, k_z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A_z(x, y, z) e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} dx dy \quad (8.57)$$

$$A_z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}_z(k_x, k_y, k_z) e^{jk_x x} e^{jk_y y} dk_x dk_y \quad (8.58)$$

对 (8.56) 式作谱域变换并代入式 (8.58), 可得

$$A_z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} [\tilde{G}_{A_z J_x}(k_x, k_y, z|0, 0) \tilde{J}_x(k_x, k_y) + \tilde{G}_{A_z J_y}(k_y, -k_x, z|0, 0) \tilde{J}_y(k_x, k_y)] \cdot e^{jk_x x} e^{jk_y y} dk_x dk_y \quad (8.59)$$

于是针对 \tilde{A}_z 的格林函数可以写为矢量形式

$$\tilde{G}_{A_z J}(k_x, k_y, z) = [\tilde{G}_{A_z J_x}(k_x, k_y, z|0, 0) \tilde{J}_x(k_x, k_y) + \tilde{G}_{A_z J_y}(k_y, -k_x, z|0, 0) \tilde{J}_y(k_x, k_y)] \quad (8.60)$$

\mathbf{J}_s 的方向可以任取, 简便起见, 我们取

$$\mathbf{J}_s = \delta(x)\delta(y)\hat{\mathbf{x}} \quad (8.61)$$

II. 求解谱域格林函数

根据变换关系以及 \mathbf{J}_s , 在无源区域的 $\tilde{\mathbf{E}}$ 和 $\tilde{\mathbf{H}}$ 场量可以用 \tilde{A}_z 和 \tilde{F}_z 表示:

$$\begin{cases} \tilde{E}_x = \frac{k_x}{\omega\epsilon} \cdot \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial z} - jk_x \tilde{F}_z \\ \tilde{E}_y = \frac{k_y}{\omega\epsilon} \cdot \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial z} + jk_y \tilde{F}_z \\ \tilde{E}_z = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{\partial^2 \tilde{A}_z}{\partial z^2} + k^2 \tilde{A}_z \right) \end{cases}, \quad \begin{cases} \tilde{H}_x = jk_y \tilde{A}_z + \frac{k_x}{\omega\mu} \cdot \frac{\partial \tilde{F}_z}{\partial z} \\ \tilde{H}_y = -jk_x \tilde{A}_z + \frac{k_y}{\omega\mu} \cdot \frac{\partial \tilde{F}_z}{\partial z} \\ \tilde{H}_z = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial^2 \tilde{F}_z}{\partial z^2} + k^2 \tilde{F}_z \right) \end{cases} \quad (8.62)$$

于是空域的波方程

$$\nabla\nabla A_z + k^2 A_z = 0 \quad (8.63a)$$

$$\nabla\nabla F_z + k^2 F_z = 0 \quad (8.63b)$$

变换为

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}_z}{\partial z^2} + \beta^2 \tilde{A}_z = 0 \quad (8.64a)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}_z}{\partial z^2} + \beta^2 \tilde{F}_z = 0 \quad (8.64b)$$

其中 $\beta^2 = k^2 - k_x^2 - k_y^2$, $k = k_0\sqrt{\epsilon_r}$, $\Im(\beta) < 0$.

对于空域中的脉冲激励, 变换到谱域后相当于平面波. 在分层介质界面上可以看成平面波入射和反射问题. 于是, 对于式 (8.64a) 和 (8.64b) 有形式解

$$\tilde{A}_{zij} = \left(e^{-j\beta_{ij}z_{ij}} + \Gamma_{Aij}e^{j\beta_{ij}z_{ij}} \right) a_{ij}(k_x, k_y) \quad (8.65a)$$

$$\tilde{F}_{zij} = \left(e^{-j\beta_{ij}z_{ij}} + \Gamma_{Fij}e^{j\beta_{ij}z_{ij}} \right) f_{ij}(k_x, k_y) \quad (8.65b)$$

注意到其与传输线上的电压电流方程类似. 其中, 对于不同的边界条件可以确定 Γ_A 、 Γ_F 、 a 和 f .

首先考虑仅存在两层介质 11 和 21 的简单情况. 于是, 式 (8.65a) 和 (8.65b) 变为

$$\tilde{A}_{z11} = \left(e^{j\beta_{11}z} + \Gamma_{A11}e^{-j\beta_{11}z} \right) a_{11} \quad (8.66a)$$

$$\tilde{A}_{z21} = \left(e^{-j\beta_{21}z} + \Gamma_{A21}e^{j\beta_{21}z} \right) a_{21} \quad (8.66b)$$

$$\tilde{F}_{z11} = \left(e^{j\beta_{11}z} + \Gamma_{F11}e^{-j\beta_{11}z} \right) f_{11} \quad (8.66c)$$

$$\tilde{F}_{z21} = \left(e^{-j\beta_{21}z} + \Gamma_{F21} e^{j\beta_{21}z} \right) f_{21} \quad (8.66d)$$

根据切向边界条件

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (8.67a)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (8.67b)$$

对其作 Fourier 变换, 由于 \mathbf{J}_s 沿 x 方向, 所以在谱域中边界条件应为: \tilde{E}_x 、 \tilde{E}_y 、 \tilde{H}_x 均在层间边界上连续, 而

$$\tilde{H}_{y21} - \tilde{H}_{y11}|_{z=0} = 1 \quad (8.68)$$

根据谱域表达式 (8.62) 和上述边界条件, 可以得到 a 和 f , 结果如下

$$f_{21} = \frac{k_y \omega \mu_0 (1 + \Gamma_{F11})}{T_e (k_x^2 + k_y^2)} \quad (8.69a)$$

$$a_{21} = \frac{k_x (1 - \Gamma_{A11}) \beta_{11}}{T_m (k_x^2 + k_y^2) \varepsilon_{11}} \quad (8.69b)$$

$$f_{11} = \frac{k_y \omega \mu_0 (1 + \Gamma_{F21})}{T_e (k_x^2 + k_y^2)} \quad (8.69c)$$

$$a_{11} = -\frac{k_x (1 - \Gamma_{A21}) \beta_{21}}{T_m (k_x^2 + k_y^2) \varepsilon_{21}} \quad (8.69d)$$

其中

$$T_m = j \left[\frac{\beta_{11}}{\varepsilon_{11}} (1 + \Gamma_{A21}) (1 - \Gamma_{A11}) + \frac{\beta_{21}}{\varepsilon_{21}} (1 + \Gamma_{A11}) (1 - \Gamma_{A21}) \right]$$

$$T_e = j [\beta_{11} (1 - \Gamma_{F11}) (1 + \Gamma_{F21}) + \beta_{21} (1 - \Gamma_{F21}) (1 + \Gamma_{F11})]$$

对于多于两层的介质, 利用类似的方法, \tilde{A}_z 和 \tilde{F}_z 可以分别求出. 表达式中的 Γ 可以等效为级联传输线来进行计算. 对于磁矢量位, 等效的传输线阻抗是 (β/ε) , 也即对于 TM 波的波阻抗; 对于电矢量位, 等效传输线导纳为 (β/μ) , 与 TE 波的波导纳相同. 同时, 对于 \tilde{A}_z 的反射系数等于传输线上电流波的反射系数, 而 \tilde{F}_z 的反射系数则等于传输线上电压波的反射系数. 上述关系可写为下列形式:

$$\Gamma'_{A_{ij}} = \frac{Z_{A_{ij}} - Z_{A_{ij+1}}}{Z_{A_{ij}} + Z_{A_{ij+1}}} = \frac{\beta_{ij}/\varepsilon_{ij} - \beta_{ij+1}/\varepsilon_{ij+1}}{\beta_{ij}/\varepsilon_{ij} + \beta_{ij+1}/\varepsilon_{ij+1}} \quad (8.70)$$

$$\Gamma'_{F_{ij}} = \frac{Y_{F_{ij}} - Y_{F_{ij+1}}}{Y_{F_{ij}} + Y_{F_{ij+1}}} = \frac{\beta_{ij} - \beta_{ij+1}}{\beta_{ij} + \beta_{ij+1}} \quad (8.71)$$

其中

$$Z_{A_{ij}} = \beta_{ij}/\varepsilon_{ij}, \quad Y_{F_{ij}} = \beta_{ij}/\mu_{ij} = \beta_{ij}/\mu_0 \quad (8.72)$$

若其中第二层介质是理想导体层, 则有

$$\Gamma'_{A_{\text{pec}}} = 1, \quad Z_{A_{\text{pec}}} = 0; \quad \Gamma'_{F_{\text{pec}}} = -1, \quad Y_{F_{\text{pec}}} = \infty$$

以上公式是针对第二层介质无限厚的情况来建立的. 若其为有限厚, 或有多层介质覆盖, 则可以利用传输线关系, 迭代求解其格林函数 [13], 或采用渐近方法, 忽略某些层的影响, 在此不再赘述.

III. 在平面传输线上的应用

对于求取多层介质中无厚度、无耗的平面传输线问题, 本方法是比较方便的. 假设在 11 和 21 层之间有一宽度为 w 的导体沿 \hat{y} 方向延伸, 则其表面电流分布可写为

$$\mathbf{J}_s(x, y) = e^{jk_e x} f(y) \hat{x} \quad (8.73)$$

其中 $k_e (= k_0 \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}})$ 是有效传播常数, $f(y)$ 是沿导体的横向电流分布. 采用类似于式 (8.60) 的方程, 用 $\tilde{G}_{E_x J_x}$ 代替 $\tilde{G}_{A_z J_x}$, 可得

$$\int_{-w/2}^{w/2} J_x(x, y) E_x(x, y, 0) dy = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{E_x J_x}(-k_e, k_y, 0 | 0, 0) F(k_y)^2 dk_y \quad (8.74)$$

其中

$$F(k_y) = \int_{-w/2}^{w/2} f(y) e^{-jk_y y} dy \quad (8.75)$$

令式 (8.74) 左端为零, 则通过解下式方程可以求得 ϵ_{eff}

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{E_x J_x}(-k_e, k_y, 0 | 0, 0) F(k_y)^2 dk_y = 0 \quad (8.76)$$

特性阻抗由下式求出

$$\begin{aligned} Z_c &= -\frac{1}{4\pi^2} \left[\int_{\text{gp}}^{z=0} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{E_z J_x}(-k_e, k_y, z) F(k_y)^2 dk_y dz \right] \bigg/ \left[\int_{-w/2}^{w/2} f(y) dy \right] \\ &= \left[\int_{\text{gp}}^{z=0} \int_{-w/2}^{w/2} E_z(x, y, z) J_x^*(x, y, z) dy dz \right] \bigg/ \left[\int_{-w/2}^{w/2} f(y) dy \right] = \frac{V_{\text{av}}}{I} \end{aligned} \quad (8.77)$$

其中 gp 代表地平面.

8.3.2 有厚度有耗传输线的谱域解法

对于有耗有厚度的传输线, 可以采用修正的谱域解法, 分析二维平面内的场分布 [27]. 以共面波导为例, 具有厚度和损耗的共面波导截面图如图 8.7a 所示.

图中, t 是导体的厚度, σ_1 是中心导体的电导率, σ_0 是接地板的电导率. 中心导体宽度为 $2a$,

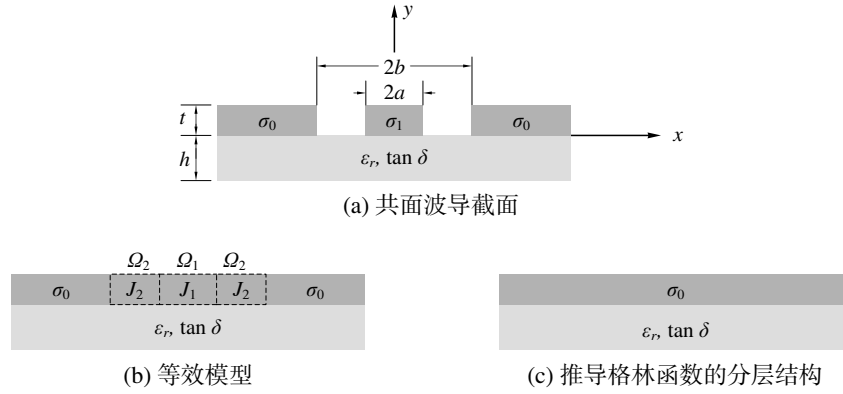


图 8.7 有耗共面波导

两接地板之间距离为 $2b$; 介质的厚度为 h , 介电常数为 ϵ_r , 损耗角正切为 $\tan \delta$.

求解时, 建立如图 8.7b 的等效模型. 其中, 中心导带和间隙均用电导率为 σ_0 的导体取代, 并分别在 Ω_1 和 Ω_2 区域添加等效电流 $\mathbf{J}_1 = (y_1 - y_0)\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{J}_2 = (y_2 - y_0)\mathbf{E}$, 其中 $y_1 = j\omega\epsilon_0 + \sigma_1$, $y_2 = j\omega\epsilon_0$, $y_0 = j\omega\epsilon_0 + \sigma_0$. 于是, 电场 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 和导带和间隙处等效电流 $\mathbf{J}_i(\mathbf{r})$ 之间有关系

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^2 (y_i - y_0) \int_{\Omega_i} \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (8.78)$$

其中, $\overline{\mathbf{G}}$ 是针对如图 8.7c 所示分层结构的并矢格林函数. 应当注意, 该格林函数也反映了中心导带和接地板的有耗特性.

若有 $\sigma_1 = \sigma_0$, 即中心导带和接地板具有相同的电导率, 则导带区域 Ω_1 内的等效电流 \mathbf{J}_1 为零. 于是, 仅需要对于间隙区域 Ω_2 内求解积分方程 (8.78).

所有场量均假定具有 $\exp[j(\omega t - k_z z)]$ 形式, 则 Fourier 变换对为

$$\tilde{A}(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x) e^{-jk_x x} dx \quad (8.79)$$

$$A(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(k_x) e^{jk_x x} dk_x \quad (8.80)$$

在式 (8.78) 式两端加任意权函数 $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ 并积分, 可以得到积分方程

$$\int_{-b}^b \int_0^t \mathbf{w}(x, y) \cdot \left\{ \sum_{i=1}^2 (y_i - y_0) \int_{-b}^b \int_0^t \overline{\mathbf{G}}(x, y, x', y', k_z) \cdot \mathbf{J}_i(x', y') dy' dx' - \mathbf{E}(x, y) \right\} dy dx = 0 \quad (8.81)$$

利用与上节类似的方法, 可以发现这一谱域格林函数的 y 相关项可以写为 $\exp(j\beta y)$ 和 $\exp(j\beta y')$ 的线性组合, 于是, 在合适选择 $\mathbf{E}(x, y)$ 的基函数的条件下, 可以大大简化积分方

程 (8.81). 电场可以表示为

$$E_p(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_p^{ij} \psi_p^i(x) \varphi_p^j(y), \quad p = x, y, z \quad (8.82)$$

在有关文献^[27]中, 作者选用的基函数 $\psi_p^l(x)$ 为 Legendre 多项式, $\varphi_p^l(y)$ 为分段线性函数. 通过 Галёркин 法可以求得电场分布, 进而求取其它参数.