

第9章 直线法

直线法 (Method of Lines) 最初是从六十年代起提出的主要用来求解线性偏微分方法的一种半离散半解析的数值方法, 在前苏联数学界得到了广泛的研究^[55]. 在八十年代, Schulz 和 Pregla 首次将直线法用于微波平面导波结构色散特性的分析^[46]. 经过国内外学者十多年来的深入研究, 目前这种方法已成为分析电磁场与电磁波问题的最流行的方法之一. MOL 的主要优势之一就是通过对离散化选定的空间坐标之一, 而将偏微分方程的其它部分仍保留为连续形式来可以降低问题的维数. 对于分层介质问题, 在分层介质平面内进行有限差分离散, 而在法向保持解析形式. 所以直线法结合了解析方法和数值方法的优点, 物理概念清晰, 程序设计简单, 计算效率高. 同时, 直线法还没有谱域方法或模匹配方法中常见的相对收敛问题出现, 而计算精度却与之相当. 例如直线法可以很方便地求解准平面波导结构的传输特性, 如常见的微带线、槽线、鳍线等等. 此外, 用直线法求解还可以很有效地分析在传播方向上规则变化的三维结构, 诸如周期结构, 谐振器等等. 但是, 相当长的时间里, 直线法一直都是用来分析无限薄金属结构问题. 后来, 许多研究者们针对有限导体厚度问题又展开了研究, 并因此诞生了直线法的多种改进方法. 例如有的方法将金属导体层当作一种特殊的介质层来处理, 有的方法则针对槽线等结构采用分区等效磁流的方法来处理等等.

9.1 基本概念

直线法的基本思想是, 对一个 n 维的偏微分方程, 将其中 $(n-1)$ 维变量离散化, 用差分算子近似取代微分算子, 使原偏微分方程转变为一组常微分方程, 最后利用解析方法求出其通解. 因此, 直线法是一种半解析、半数值的近似方法.

电磁场可以用两个标量位 ψ^e 和 ψ^m 来表示, 满足二维 Helmholtz 方程:

$$\frac{\partial^2 \psi^{e,m}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{e,m}}{\partial y^2} + (k^2 + \beta^2) \psi^{e,m} = 0 \quad (9.1)$$

其中 β 是沿场传播方向的相位常数. 首先将 (9.1) 式中的 x 变量离散, 于是在截面上划出了 N 条平行于 y 轴的直线. 相邻直线间距为 h , 于是 ψ 可以被 $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, \dots, N$ 处的一组 $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$ 替代, 而其对 x 的微分也用有限差分代替. 经过这一过程可以得到 N 个相互耦合的常微分方程

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} + \frac{1}{h^2} [\psi_{i-1}(y) - 2\psi_i(y) + \psi_{i+1}(y)] + (k^2 + \beta^2) \psi_i(y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9.2)$$

若引入向量

$$\boldsymbol{\psi} = [\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_N(y)]^T$$

以及二阶差分矩阵

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & p_2 \end{bmatrix}$$

则 (9.2) 式可改写为

$$h^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \{P - h^2(k^2 - \beta^2)I\} \psi = 0 \quad (9.3)$$

其中 I 是单位矩阵, p_1 和 p_2 取决于边界条件. 由于 P 是实对称矩阵, 存在正交阵 T 可将 P 对角化:

$$T^T P T = \text{diag}(\lambda) \quad (9.4)$$

于是 λ 即为 P 的特征值. 引入矢量 U ,

$$T^T \psi(y) = U(y) \quad (9.5)$$

则由 (9.3) 式, 可以得到 N 个独立的常微分方程:

$$h^2 \frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2} - [\lambda_i - h^2(k^2 - \beta^2)] U_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9.6)$$

显然 (9.6) 式在均匀同性区域可以解析求解. 其通解形式为

$$\begin{bmatrix} U_i(y_1) \\ h \frac{\partial U_i}{\partial y}(y_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \frac{\kappa_i(y_1 - y_2)}{h} & \frac{1}{\kappa_i} \sinh \frac{\kappa_i(y_1 - y_2)}{h} \\ \kappa_i \sinh \frac{\kappa_i(y_1 - y_2)}{h} & \cosh \frac{\kappa_i(y_1 - y_2)}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i(y_2) \\ h \frac{\partial U_i}{\partial y}(y_2) \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

其中 $\kappa_i = \sqrt{\lambda_i - h^2(k^2 - \beta^2)}$. 于是边值问题就转化为线性代数方程.

P 矩阵包含了横向的边界条件, 其中左边界条件确定 p_1 , 右边界条件确定 p_2 . 例如, 若左边界满足 Neumann 条件 ($\partial\psi/\partial x = 0$), 则要求 $\psi_0 = \psi_1$, 代入 (9.2) 式则得到 $p_1 = 1$. 同理, 若右边界满足 Dirichlet 条件 ($\psi = 0$), 则要求 $\psi_{N+1} = 0$, 需要 $p_2 = 2$ 满足. 将耦合微分-差分方程转化为非耦合方程组的变换矩阵和本征值如表 9.1 所示.

9.2 应用实例

9.2.1 带调谐片的微带线结构

带调谐片的微带线如图 9.1 所示. 根据对称结构, 图中所示仅为截面的一半, 左侧边界为理想磁壁.

表 9.1 不同边界条件下的变换矩阵和本征值

左边界	右边界	变换矩阵 $[T]_{ij}$	本征值 λ_j
Dirichlet	Dirichlet	$\sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{ij\pi}{N+1}$	$4 \sin^2 \frac{j\pi}{2(N+1)}$
Dirichlet	Neumann	$\sqrt{\frac{2}{N+0.5}} \sin \frac{i(j-0.5)\pi}{N+0.5}$	$4 \sin^2 \frac{(j-0.5)\pi}{2N+1}$
Neumann	Dirichlet	$\sqrt{\frac{2}{N+0.5}} \cos \frac{(i-0.5)(j-0.5)\pi}{N+0.5}$	$4 \sin^2 \frac{(j-0.5)\pi}{2N+1}$
Neumann	Neumann	$\sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{(i-0.5)(j-1)\pi}{N}, \quad j > 1$ $1/\sqrt{N}, \quad j = 1$	$4 \sin^2 \frac{(j-1)\pi}{2N}$

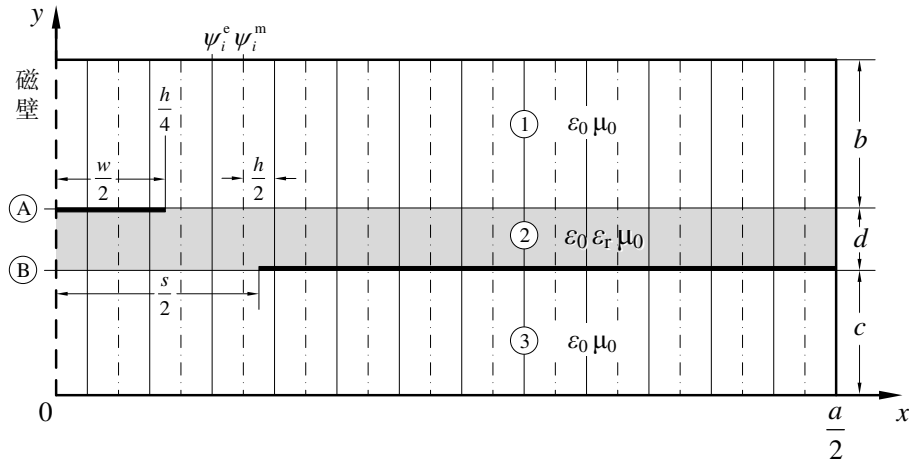


图 9.1 带调谐片的微带线半截面示意图

完整的电磁场可用 TE 场和 TM 场的叠加来表示, 即可从标量位导出

$$\psi^e = [j\omega\epsilon/(k^2 - \beta^2)]E_z \quad (9.8)$$

$$\psi^m = [j\omega\epsilon/(k^2 - \beta^2)]H_z \quad (9.9)$$

理论上讲, ψ^e 和 ψ^m 的离散直线可以重叠, 但由于电场和磁场边界条件互补, 将 ψ^e 和 ψ^m 按照 $h/2$ 间隔交替划分更为方便, 同时保证了横向边界条件易被满足。

在上述模型中导体条带边缘的场呈现奇异性, 在奇异性附近区域, 应用差分法分析时很难估计计算误差) 前面利用含有金属条带的交界面上的连续性条件建立特征方程时, 所用到的连续

性条件仅是该交接面上若干离散点上的条件, 而对 2 根离散直线之间导体条带边缘的实际位置完全没有加以考虑. 因此, 要减小边缘附近的离散误差, 使之限定在允许范围内, 必须合理安排离散直线. 设导带边缘位于相邻离散直线之间的某一确定位置, 由分析^[46] 可知, 使边缘离散误差最小时, 导体条带的边缘位于直线之间最佳的位置为位于导体条带上的最后一根 ψ^e 线与边缘的距离应为 $\frac{1}{4}h$, 最后一根 ψ^m 线与边缘的距离应为 $\frac{3}{4}h$. 可以看出, 电线与磁线的位置必须相互平移错开, 这样的划线方式是使近似场解满足边缘条件所要求的方式, 使得离散误差得到良好补偿.

考虑图 9.1 所示结构, 在 A 和 B 分界面上分别列出切向场分量匹配方程:

$$\frac{\beta}{\omega \varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi_{1,3}^e - \frac{1}{\varepsilon_r} \psi_2^e \right) = \frac{\partial \psi_2^m}{\partial y} - \frac{\partial \psi_{1,3}^m}{\partial y} \quad (9.10)$$

$$(k_0^2 - \beta^2) \psi_{1,3}^e = \frac{1}{\varepsilon_r} (\varepsilon_r k_0^2 - \beta^2) \psi_2^e \quad (9.11)$$

$$\frac{\partial \psi_{1,3}^e}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2^e}{\partial y} = \frac{\beta}{\omega \mu} \frac{\partial}{\partial x} (\psi_{1,3}^m - \psi_2^m) - J_z \quad (9.12)$$

$$(k_0^2 - \beta^2) \psi_{1,3}^m = (\varepsilon_r k_0^2 - \beta^2) \psi_2^m + j\omega \mu J_x \quad (9.13)$$

其中下标数字表示图中 1, 2, 3 区域, J_x 和 J_z 是分界面 A 和 B 上电流密度分布. 于是, 微分算子 $\partial/\partial x$ 可以用下列差分算子代替:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

而

$$\frac{\partial \psi^e}{\partial x} = \frac{1}{h} \mathbf{D} \psi^e$$

$$\frac{\partial \psi^m}{\partial x} = -\frac{1}{h} \mathbf{D}^T \psi^m$$

其中仅仅取了相邻项的差分, 这也正是交替直线的一个有时. 在 x 方向上离散后, 式 (9.10)~(9.13) 可以分别用 \mathbf{T}_e 和 \mathbf{T}_m 变换, 得到

$$\frac{\beta}{\omega \varepsilon_0} \underbrace{\mathbf{T}_m^T \mathbf{D} \mathbf{T}_e}_{[\delta]} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{U}_{1,3}^e - \frac{1}{\varepsilon_r} \mathbf{U}_2^e \right) = \frac{\partial \mathbf{U}_2^m}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{U}_{1,3}^m}{\partial y} \quad (9.15)$$

$$(k_0^2 - \beta^2) \mathbf{U}_{1,3}^e = \frac{1}{\varepsilon_r} (\varepsilon_r k_0^2 - \beta^2) \mathbf{U}_2^e \quad (9.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}_{1,3}^e}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{U}_2^e}{\partial y} = \frac{\beta}{\omega \mu} \underbrace{\mathbf{T}_e^T \mathbf{D} \mathbf{T}_m}_{[\delta]^T} \cdot (\mathbf{U}_{1,3}^m - \mathbf{U}_2^m) - \mathbf{T}_e^T \mathbf{J}_z \quad (9.17)$$

$$(k_0^2 - \beta^2)U_{1,3}^m = (\epsilon_r k_0^2 - \beta^2)U_2^m + j\omega\mu T_m^T J_x \quad (9.18)$$

其中, U^e 和 U^m 是经过变换的电位矢量. 从表 9.1 中可以得到 T^e 和 T^m , 易知变换后的矩阵 $[\delta]$ 是对角阵:

$$[\delta] = -\text{diag}(\sqrt{\lambda^m}) \quad (9.19)$$

根据式 (9.7), $\partial U / \partial y$ 可以用变换后的电位自身来表示. 于是, 方程就只包含离散的变换后电位矢量 $U^{e,h}$ 和 A、B 分界面处的离散的电流密度分布 $J_{x,y}$. 在金属处有 $E_t^{(A,B)} = 0$, 通过变换可以得到特征方程, 进而得到本征值解.

例 求解如图 9.2a 所示的屏蔽微带线. 参数为 $\epsilon_r = 9, w/d = 2, a/d = 7, b/d = 3, d = 1\text{mm}$.

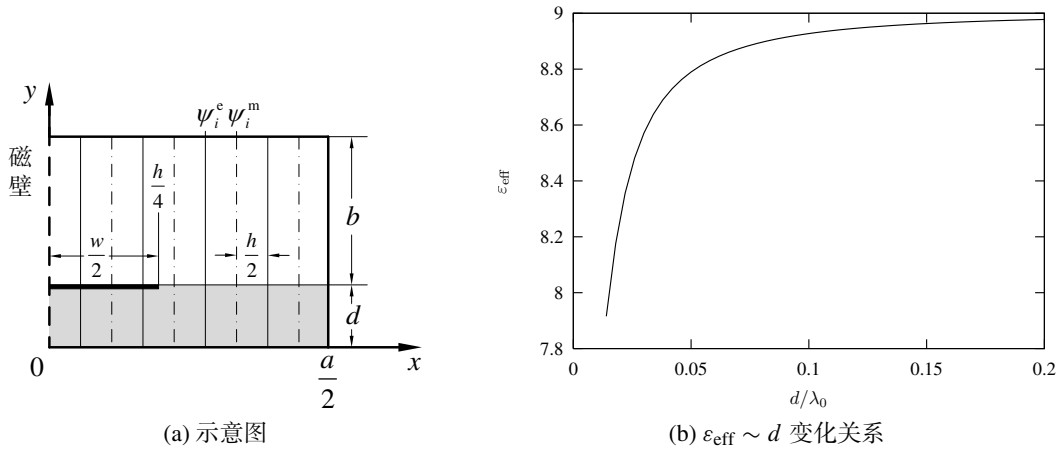


图 9.2 屏蔽微带线

9.2.2 平面谐振腔的分析

以简单的矩形谐振腔为例, 如图 9.3 所示, 其中 \times 代表电离散线, \circ 代表磁离散线 [51]. 矩形谐振腔为对称结构. 类似上节的分析, 可以用标量位 ψ^e 和 ψ^m 来得到场分量

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \nabla (\psi^e \hat{z}) - \nabla (\psi^m \hat{z}) \quad (9.20)$$

$$\mathbf{H} = \nabla (\psi^e \hat{z}) + \frac{1}{j\omega\mu_0} \nabla \nabla (\psi^m \hat{z}) \quad (9.21)$$

其中时谐因子选为 $e^{j\omega t}$. 在空气和介质的界面, 根据电场和磁场的切向边界条件, 可得

$$E_{xA} - E_{xB} = \frac{1}{j\omega\epsilon_r\epsilon_0} \frac{\partial^2 \psi_A^e}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_A^m}{\partial y} - \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \frac{\partial^2 \psi_B^e}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \psi_B^m}{\partial y} = 0 \quad (9.22a)$$

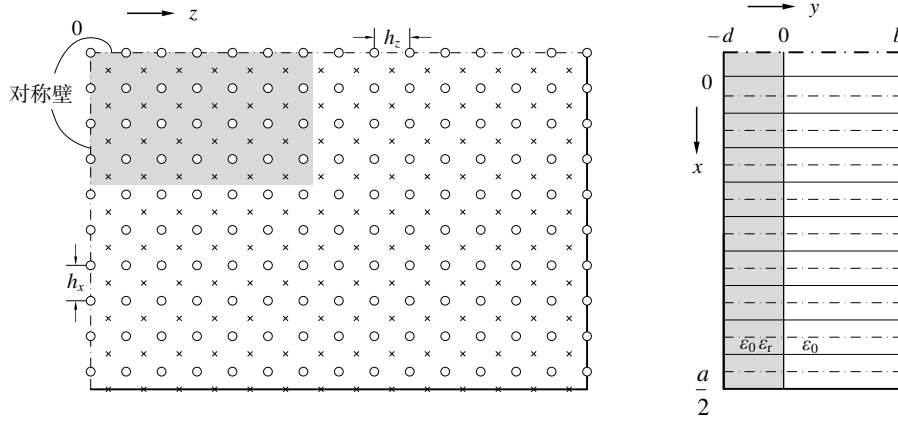


图 9.3 矩形微带谐振腔的离散

$$E_{zA} - E_{zB} = \frac{1}{j\omega\epsilon_r\epsilon_0} \left(\frac{\partial^2 \psi_A^e}{\partial z^2} + \epsilon_r k_0^2 \psi_A^e \right) - \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \left(\frac{\partial^2 \psi_B^e}{\partial z^2} + k_0^2 \psi_B^e \right) = 0 \quad (9.22b)$$

$$H_{xA} - H_{xB} = \frac{\partial \psi_A^e}{\partial y} + \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial^2 \psi_A^m}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \psi_B^e}{\partial y} - \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial^2 \psi_B^m}{\partial x \partial z} = -J_z \quad (9.22c)$$

$$H_{zA} - H_{zB} = \frac{1}{j\omega\mu_0} \left(\frac{\partial^2 \psi_A^m}{\partial z^2} + \epsilon_r k_0^2 \psi_A^m - \frac{\partial^2 \psi_B^m}{\partial z^2} - k_0^2 \psi_B^m \right) = J_x \quad (9.22d)$$

其中 $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$.

求解时, 在 x 和 z 方向上离散选定区域, ψ^m 和 ψ^e 线按 $h_x/2$ 和 $h_z/2$ 交替. 在图 9.3 中, 位于坐标 $x = (i - 0.5)h_x$ 和 $z = (k - 0.5)h_z$ 的 ψ^e 线用 ψ_{ik}^e 来表示, 并写为矩阵 $[\psi^e]$. 则对于 ψ^e 的一阶偏导数可以离散为

$$\left. \frac{\partial \psi^e}{\partial x} \right|_{z=(k-0.5)h_z}^{x=ih_x} = \frac{\psi_{i+1,k}^e - \psi_{i,k}^e}{h_x} + O(h_x^2) \quad (9.23)$$

或写为矩阵形式

$$h_x \frac{\partial \psi^e}{\partial x} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{1,1}^e & \cdots & \psi_{1,N_z}^e \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{N_x,1}^e & \cdots & \psi_{N_x,N_z}^e \end{bmatrix} = [D_x][\psi^e] \quad (9.24)$$

差分矩阵 $[D_x]$ 的形式也取决于 ψ^e 的横向边界条件. 类似地, 可以对 ψ^m 的偏导作差分离散

$$h_x \frac{\partial \psi^m}{\partial x} \rightarrow -[D_x]^T[\psi^m] \quad (9.25)$$

结合式 (9.24) 和 (9.25), 可得二阶偏导的差分近似

$$h_x^2 \frac{\partial^2 \psi^e}{\partial x^2} \rightarrow -[D_x]^T [D_x] [\psi^e] = [D_{xx}^e] [\psi^e] \quad (9.26)$$

$$h_x^2 \frac{\partial^2 \psi^m}{\partial x^2} \rightarrow -[D_x] [D_x]^T [\psi^m] = [D_{xx}^m] [\psi^m] \quad (9.27)$$

同理可以得到关于 z 方向的差分算子

$$h_z^2 \frac{\partial^2 \psi^e}{\partial z^2} \rightarrow [\psi^e] [D_z] [D_z]^T = [\psi^e] [D_{zz}^e]^T \quad (9.28)$$

以及关于 x 和 z 方向二阶差分算子

$$h_x h_z \frac{\partial^2 \psi^e}{\partial x \partial z} \rightarrow [D_x] [\psi^e] [D_z]^T \quad (9.29)$$

于是

$$h_x h_z \frac{\partial^2 \psi^e}{\partial x \partial z} \Big|_{\substack{x=ih_x \\ z=kh_z}} \approx \psi_{i,k}^e - \psi_{i,k+1}^e + \psi_{i+1,k+1}^e - \psi_{i+1,k}^e \quad (9.30)$$

$[D_{xx}^e]$ 和 $[D_{zz}^e]$ 都是三对角结构, 则离散后的 Helmholtz 方程

$$\frac{d^2 [\psi^e]}{dy^2} + \frac{[D_{xx}^e] [\psi^e]}{h_x^2} + \frac{[\psi^e] [D_{zz}^e]^T}{h_z^2} + \epsilon_r k_0^2 [\psi^e] = 0 \quad (9.31)$$

代表了 $N_x N_z$ 个相互耦合的差分方程. 利用与上节类似的方法, 选定正交变换阵 $[T_x^e]$ 和 $[T_z^e]$, 则差分矩阵可变换为对角阵

$$[T_x^e]^T [D_{xx}^e] [T_x^e] = \text{diag}[d_{xx}^e] \quad (9.32)$$

$$[T_z^e]^T [D_{zz}^e] [T_z^e] = \text{diag}[d_{zz}^e] \quad (9.33)$$

于是, 对于

$$[U] = [T_x^e]^T [\psi^e] [T_z^e] \quad (9.34)$$

有

$$\frac{d^2 [U]_{ik}}{dy^2} - \kappa_{ik}^2 [U]_{ik} = 0 \quad (9.35)$$

其中

$$\kappa_{ik}^2 = - \left(\frac{[d_{xx}^e]_{ii}}{h_x^2} + \frac{[d_{zz}^e]_{kk}}{h_z^2} + \epsilon_r k_0^2 \right) \quad (9.36)$$

则方程 (9.22a)~ (9.22d) 可以变换到谱域求解, 得到的方程形式如下

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_z \\ \tilde{E}_x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [\tilde{Z}_{11}] & [\tilde{Z}_{12}] \\ [\tilde{Z}_{21}] & [\tilde{Z}_{22}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{J}_z \\ \tilde{J}_x \end{pmatrix} \quad (9.37)$$

其中 $[\tilde{Z}_{nm}]$ 是对角阵.

将式 (9.37) 反变换回空域, 这时可以仅在金属贴片的较小区域内进行, 得到降阶的方程

$$\begin{pmatrix} E_z \\ E_x \end{pmatrix}_{\text{red}} = \begin{bmatrix} [Z_{11}] & [Z_{12}] \\ [Z_{21}] & [Z_{22}] \end{bmatrix}_{\text{red}} \begin{pmatrix} J_z \\ J_x \end{pmatrix}_{\text{red}} = 0 \quad (9.38)$$

现在 $[Z_{nm}]$ 即为满阵, 且仅对谐振频率有非平凡解. 通过求解本征值即可解得所有谐振频率和相应场分布.

9.2.3 误差分析及精度改进

直线法的误差包括模型误差和计算误差两部分, 其中计算误差主要源于计算机字长有限而引入的舍入误差, 关于其分析在大部分有关数值计算方面的著作中都可找到. 模型误差是直线法的主要误差来源, 具体地又可分为方程的离散化误差和边界的离散化误差. 方程的离散化误差也就是将方程中的某些偏导数用差商近似时引入的误差. 在确定直线法解的过程中仅用到了直线与边界交点上的边界条件, 或者说仅用到了边界上一些离散点上的位函数或其导数值. 因此, 必将遗漏各交点之间边界条件变化和边界形状变化的信息, 从而导致边界的离散化误差. 在上述直线法的求解过程中, 第一步引入的显然是方程的离散化误差; 第二步的通解是通过严格的解析方法得到的, 因而不引入任何误差; 第三步中前一部分将引入边界的离散化误差而后一部分将引入计算误差. 边界误差除了边界条件的离散化误差外, 对于曲边界问题还存在边界形状的离散化误差. 当边界比较光滑而且各点的曲率半径都比较大时, 边界形状的离散化误差很小.

提高直线法的精度最直接的方法就是通过增加线数, 这样可将直线法的误差缩至任意小. 但是, 一方面随着线数的增加所需计算机存储空间和计算时间迅速增加; 另一方面随着线数的增加计算机舍入误差的影响越来越严重, 其结果将导致直线法解的精度下降. 因此, 在进行直线法的计算过程中要主要线数的选取. 文献对直线法线数的选择原则作了一定的介绍. 提高直线法的精度除了通过增加线数外, 另一种方法是加快收敛速度, 或者说采用高精度的离散化格式. 还有一种方法是通过已有直线法解进行最小二乘逼近也可以提高直线法的精度. 对此的详细介绍可以参考相关文献, 在此不在赘述.

9.3 直线法新进展

由于与谱域法相比, 它没有选取基函数的问题, 因而又很大的灵活性, 同时具有谱域导抗法的某些优点, 因此直线法的发展很快, 应用领域也在不断地扩大.

1990年 Wu 等把 Fourier 变换和直线法变换结合起来,提出了一种新的方法.这种新的方法除了分界面的法线方向外,另外两个方向上一个作 Fourier 变换,另一个作直线法变换.相对与直线法而言,这种方法也可以说成是平面法,它在处理有些问题时特别有效.而将广义谱域导抗之间引入到直线法,可使直线法推广到分析具有分层介质的复杂的不等高波导结构. Pregla 在直线法中引入吸收边界条件,可使研究范围从闭域扩展到开域.最近又出现一种直线法与周期边界条件相结合分析开域平面结构的方法.与前者相比,虽然求解区域增大,但保持了各层介质差分矩阵具有相同解析形式的特征值和特征矢的优点,并能利用 FFT 快速算法计算阻抗元素,因而计算效率大大高于前者.采用共形映射技术将无限开域结构变换成有限的闭域结构,也可使直线法扩展到处理开域问题.这一方法不存在人工引入的边界与实际边界的差别,已成功地用来分析开域微带、耦合微带特性.将直线法引入到圆柱形结构,分析了圆柱形微带衬底结构的传输特性;并利用无限大圆柱形微带线结构来模拟开域微带,也取得了较好的结果.

在直线法中引入新的本征方法后,既不要求根,也不要求电流分布,就可分析和提取微带不连续参数.此外,直线法还可以用于包括不连续介质结构、含各向异性介质和有耗平面分层介质结构问题.总之,可用直线法处理的问题越来越多,处理的结构也更加复杂,还提出了时域直线法等新方法.